PERIODICAL UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE

DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

J. RADON

WIEN

SCHRIFTLEITUNG

N. HOFREITER

WIEN

55. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT

(AUSGEGEBEN IM DEZEMBER 1951)

WIEN

SPRINGER-VERLAG

1951

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

55. Band/4. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Hellmich, K. Stetige und halbstetige Punkt-Mengen-Funktionen 265

Aigner, A. Der multiplikative Aufbau beliebiger unendlicher Ordnungszahlen 297

Hametner, H. Über die Approximation von indefiniten binären quadratischen Formen 300

Mordell, L. J. On the Equation $ax^2+by^2-cz^2=0$ 323

Redei, L. Die Einfachheit der alternierenden Gruppen 328

Müller, H. R. Zur Geometrie der dreigliedrigen Bewegungevorgänge. . . . 330

Kruppa, E. Natürliche Geometrie der Mindingschen Verbiegungen der Strahlflächen 340

Buchbesprechungen 346

Stetige und halbstetige Punkt-Mengen-Funktionen.

Von

Kurt Hellmich, Graz.

(Eingelangt am 10. Jänner 1951.)

§ 1. Zusammenfassung und Kritik der bisherigen Begriffe.

Durch eine Punkt-Mengen-Funktion wird jedem Punkt a einer Menge E eine Teilmenge $F(a)$ des Raumes R zugeordnet. Wir wollen wie in der Theorie der reellen Funktionen (Punkt-Zahl-Funktionen) die Stetigkeit und Halbstetigkeit definieren und Sätze dieser Theorie auf Punkt-Mengen-Funktionen verallgemeinern. Dem Begriff des Grenzwertes von Zahlenfolgen entsprechen dabei drei Begriffe von Grenzmengen von Mengenfolgen:

Definition 1: Der obere bzw. untere *offene Limes* $o\text{-}\overline{\lim_n} M_n$ bzw. $o\text{-}\underline{\lim_n} M_n$ der Mengenfolge $\{M_n\}$ ist die Menge der Punkte, die mit einer Umgebung in unendlich vielen bzw. fast allen[1] Mengen M_n enthalten sind.

Definition 2: Die obere bzw. untere *Grenzmenge* $\overline{\lim_n} M_n$ bzw. $\underline{\lim_n} M_n$ der Mengenfolge $\{M_n\}$ ist die Menge der Punkte, die in unendlich vielen bzw. fast allen Mengen M_n enthalten sind.

Definition 3: Der obere bzw. untere *abgeschlossene Limes* $a\text{-}\overline{\lim_n} M_n$ bzw. $a\text{-}\underline{\lim_n} M_n$ der Mengenfolge $\{M_n\}$ ist die Menge der Punkte, in deren Umgebung Punkte aus unendlich vielen bzw. fast allen Mengen M_n enthalten sind.

Aus den Definitionen 1 bis 3 folgen unmittelbar die Formeln

$$o\text{-}\overline{\lim_n} M_n \subset \overline{\lim_n} M_n \subset a\text{-}\overline{\lim_n} M_n \tag{1}$$

[1] „fast alle" heißt „alle, bis auf endlich viele Ausnahmen".

$$o\text{-}\overline{\lim_n} M_n \subset \underline{\lim_n} M_n \subset a\text{-}\overline{\lim_n} M_n \tag{2}$$

Nach *C. Kuratowski*[2] ist eine Punkt-Mengen-Funktion $F(a)$ mit abgeschlossenen, nicht leeren Funktionswerten *oberhalb stetig*, wenn für jede Punktfolge $\{a_n\}$ aus E mit $\lim_n a_n = a$ gilt.

Definition 4:

$$a\text{-}\overline{\lim_n} F(a_n) \subset F(a)$$

und *unterhalb stetig*, wenn gilt

Definition 5:

$$a\text{-}\underline{\lim_n} F(a_n) \supset F(a)$$

und *stetig*, wenn gilt

Definition 6:

$$a\text{-}\underline{\lim_n} F(a_n) = a\text{-}\overline{\lim_n} F(a_n) = a\text{-}\lim_n F(a_n) = F(a),$$

d. h. wenn $F(a)$ sowohl oberhalb als auch unterhalb stetig ist.

Nun stehen für die Definition der Halbstetigkeit drei Begriffe (Definitionen 1 bis 3) zur Verfügung. *Kuratowski* verwendete die abgeschlossenen Limites (Definition 3), wodurch sich wegen (1) und Definition 4 der engste Begriff der Oberhalbstetigkeit und wegen (2) und Definition 5 der weiteste Begriff der Unterhalbstetigkeit ergab. Diese Begriffsbildung ist sicher am günstigsten, wenn es sich um paarweise fremde, abgeschlossene Funtionswerte handelt, z. B. um die Elemente eines Zerlegungsraumes. Sie ist aber unsymmetrisch und daraus folgt die Unsymmetrie mancher Lehrsätze. Das bedeutet, daß es z. B. zu manchem Lehrsatz, der für oberhalb stetige Funktionen gilt, keinen entsprechenden für unterhalb stetige Funktionen gibt. Da wir eine Reihe von Sätzen aus der Theorie der reellen Funktionen verallgemeinern wollen, müssen wir, wie dort, symmetrische Begriffe für die Oberhalb- und Unterhalbstetigkeit von Punkt-Mengen-Funktionen verwenden[3].

---

[2] *C. Kuratowski*, „Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermées". Fundamenta math., Bd. 18, Seite 154.

[3] Vgl. *K. Hellmich*, „Funktionen, deren Werte Mengen sind". Dort wurde diese Symmetrie trotz *Kuratowski*'s Definitionen weitgehend durch die Bedingung erzielt, daß sämtliche Funktionswerte vergleichbare Mengen sind. Siehe Seite 88 der Monatshefte für Mathematik und Physik, 49. Band, Satz XI. Diese einschneidende Voraussetzung der Vergleichbarkeit der Funktionswerte ist hier nicht nötig.

§ 2. Neue Definitionen.

Definition 7: Eine (Punkt-Mengen-)Funktion $F(a)$ ist *oberhalb stetig* (*im engeren Sinne*)[4], wenn für jede gegen a konvergierende Punktfolge $\{a_n\}$ aus E gilt:

1. Bedingung:

$$a - \overline{\lim_n} F(a_n) \subset F(a)_a{}^5$$

und

2. Bedingung:

$$F(a)_{ao}{}^6 = F(a),$$

wenn $F(a)$ offen ist, bzw.

$$F(a)_{oa} = F(a),$$

wenn $F(a)$ abgeschlossen ist.

Definition 8: Eine Funktion $F(a)$ ist *unterhalb stetig* (*im engeren Sinne*)[4], wenn für jede gegen a konvergierende Punktfolge $\{a_n\}$ aus E gilt.

1. Bedingung:

$$o - \underline{\lim_n} F(a_n) \supset F(a)_o$$

und

2. Bedingung:

$$F(a)_{ao} = F(a),$$

wenn $F(a)$ offen ist, bzw.

$$F(a)_{oa} = F(a),$$

wenn $F(a)$ abgeschlossen ist.

Definition 9: Eine Funktion $F(a)$ ist *oberhalb stetig im weiteren Sinne*, wenn für jede gegen a konvergierende Folge $\{a_n\}$ aus E gilt

$$[a - \overline{\lim_n} F(a_n)]_o \subset F(a).$$

Definition 10: $F(a)$ ist *unterhalb stetig im weiteren Sinne*, wenn

$$[o - \underline{\lim_n} F(a_n)]_a \supset F(a).$$

Definition 11: Eine Funktion $F(a)$ ist *stetig* (*in jedem Sinne*), wenn sie oberhalb und unterhalb stetig ist.

---

[4] „im engeren Sinne" wird im folgenden meistens weggelassen.

[5] M_a bedeutet die abgeschlossene Hülle der Menge M.

[6] M_o bedeutet den offenen Kern der Menge M. M_{ao} ist der offene Kern der abgeschlossenen Hülle von M.

Die Definition 9 ist weiter als die Definition 4.

Für abgeschlossene Mengen ist die Definition 10 enger als die Definition 5, da wegen (2) gilt

$$o\text{-}\underset{n}{\lim}\, F(a_n) \subset [o\text{-}\underset{n}{\lim}\, F(a_n)]_a \subset a\text{-}\underset{n}{\lim}\, F(a_n).$$

Satz 1: Eine im engeren Sinne oberhalb stetige Funktion ist im weiteren Sinne oberhalb stetig.

Beweis: Aus $a\text{-}\overline{\lim_n} F(a_n) \subset F(a)_a$ und $F(a)_{oa} = F(a)$ bzw. $F(a)_{oa} = F(a)$ ergibt sich $[a\text{-}\overline{\lim_n} F(a_n)]_o \subset F(a)$ durch Bildung des offenen Kernes wie folgt:

$$[a\text{-}\overline{\lim_n} F(a_n)]_o \subset F(a)_{ao} = F(a), \text{ bzw.}$$

$$[a\text{-}\overline{\lim_n} F(a_n)]_o \subset F(a)_{ao} = F(a)_o \subset F(a)_{oa} = F(a).$$

Entsprechend beweist man den

Satz 2: Eine im engeren Sinne unterhalb stetige Funktion ist im weiteren Sinne unterhalb stetig.

§ 3. Formeln und Hilfssätze.

Um die Beweise zu verkürzen, stellen wir zuerst die Formeln aus der Punktmengenlehre zusammen, die später benötigt werden. Für jeden Raum R und jede Menge M gilt

$$M_{oa} = M_{oaoa} \tag{3}$$

$$M_{ao} = M_{aoao} \tag{4}$$

$$R - M_o = [R - M]_a \tag{5}$$

$$R - M_a = [R - M]_o \tag{6}$$

Für die Vereinigung $\underset{k}{V} M_k$ *endlich* vieler Mengen M_k gilt

$$\underset{k}{V} M_{ka} = [\underset{k}{V} M_k]_a \tag{7}$$

Für den Durchschnitt $\underset{k}{D} M_k$ *endlich* vieler Mengen M_k gilt

$$\underset{k}{D} M_{ko} = [\underset{k}{D} M_k]_o \tag{8}$$

Für *endlich oder unendlich* viele Mengen M_k gilt

$$\underset{k}{V} M_{ka} \subset [\underset{k}{V} M_k]_a \tag{9}$$

$$\underset{k}{D}\, M_{ko} \supset [\underset{k}{D}\, M_k]_o \tag{10}$$

$$\underset{k}{D}\, M_{ka} \supset [\underset{k}{D}\, M_k]_a \tag{11}$$

$$\underset{k}{V}\, M_{ko} \subset [\underset{k}{V}\, M_k]_o \tag{12}$$

Für *endlich* viele *offene* M_k gilt

$$[\underset{k}{D}\, M_k]_a \supset [\underset{k}{D}\, M_{ka}]_o{}^{7} \tag{13}$$

Für *endlich* viele *abgeschlossene* Mengen M_k gilt

$$[\underset{k}{V}\, M_k]_o \subset [\underset{k}{V}\, M_{ko}]_a \tag{14}$$

Beweis zu (14): Ist p aus $[\underset{k}{V}\, M_k]_o$, so gibt es eine Umgebung U_p, die Teilmenge von $\underset{k}{V}\, M_k$ ist. Wir bilden die absteigende Folge offener Mengen

$$U_1 = U_p - M_1,\ U_2 = U_1 - M_2,\ \ldots\ U_n = U_{n-1} - M_n = U_p - \underset{k}{V}\, M_k$$

Die letzte Menge ist wegen $U_p \subset \underset{k}{V}\, M_k$ leer. Wegen $U_k \subset U_{k-1}$ gibt es eine erste leere Menge U_k. Für diese gilt $U_k = U_{k-1} - M_k = 0$ und daher $U_{k-1} \subset M_k$. Wegen $0 \neq U_{k-1} \subset U_p$ gibt es Punkte in U_p, die innere Punkte von M_k sind. p ist also Häufungspunkt von M_{ko}. Formel (13) wird daraus durch Bildung der Komplemente bewiesen.

Für jede Mengenfolge $\{M_n\}$ gilt

$$a\text{-}\overline{\lim_n}\, M_{na} = a\text{-}\overline{\lim_n}\, M_n \tag{15}$$

$$o\text{-}\underline{\lim_n}\, M_{no} = o\text{-}\underline{\lim_n}\, M_n \tag{16}$$

$$a\text{-}\overline{\lim_n}\, (R - M_n) = R - o\text{-}\underline{\lim_n}\, M_n \tag{17}$$

Für jede *endliche* Menge von Folgen $\{M_{1n}\}, \{M_{2n}\}, \ldots \{M_{kn}\}, \ldots$ gilt

$$\underset{k}{V}\, a\text{-}\overline{\lim_n}\, M_{kn} = a\text{-}\overline{\lim_n}\, \underset{k}{V}\, M_{kn} \tag{18}$$

$$\underset{k}{D}\, a\text{-}\underline{\lim_n}\, M_{kn} = a\text{-}\underline{\lim_n}\, \underset{k}{D}\, M_{kn} \tag{19}$$

Für jede *endliche* oder *unendliche* Menge von Folgen $\{M_{1n}\}, \{M_{2n}\}, \ldots \{M_{kn}\}, \ldots$ gilt

[7] Vgl. den Beweis zu Formel (14).

$$\underset{k}{D}\, a \text{-} \overline{\lim_{n}}\, M_{kn} \supset a \text{-} \overline{\lim_{n}}\, \underset{k}{D}\, M_{kn} \tag{20}$$

$$\underset{k}{V}\, o \text{-} \lim_{\overline{n}}\, M_{kn} \subset o \text{-} \lim_{\overline{n}}\, \underset{k}{V}\, M_{kn} \tag{21}$$

Definition 12: Der abgeschlossene ε-Kern $\overline{K}\,(M, \varepsilon)$ der Menge M ist die Menge aller Punkte p, die mit einer offenen ε-Umgebung $U\,(p, \varepsilon)$ in M enthalten sind.

Diese Definition ist gleichwertig der Gleichung

$$\overline{K}\,(M, \varepsilon) = R - U\,(R - M, \varepsilon)^8 \tag{22}$$

Definition 13: Der offene ε-Kern $K\,(M, \varepsilon)$ ist die Menge der Punkte p, für die der Abstand $d\,(p, R{-}M) > \varepsilon$ ist, d. h.

$$K\,(M, \varepsilon) = R - \overline{U}\,(R - M, \varepsilon)^8 \tag{23}$$

Da der offene Kern N_o die größte offene Teilmenge von N, bzw. die abgeschlossene Hülle N_a die kleinste abgeschlossene Obermenge von N ist, folgt

$$U\,(M, \varepsilon) \subset \overline{U}\,(M, \varepsilon)_o \subset \overline{U}\,(M, \varepsilon) \tag{24}$$

$$U\,(M, \varepsilon) \subset U\,(M, \varepsilon)_a \subset \overline{U}\,(M, \varepsilon) \tag{25}$$

und durch Komplementbildung im Hinblick auf (22) und (23)

$$\overline{K}\,(M, \varepsilon) \supset K\,(M, \varepsilon)_a \supset K\,(M, \varepsilon) \tag{26}$$

$$\overline{K}\,(M, \varepsilon) \supset \overline{K}\,(M, \varepsilon)_o \supset K\,(M, \varepsilon) \tag{27}$$

Für $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ gilt

$$\overline{U}\,(M, \varepsilon_1) \subset U\,(M, \varepsilon_2) \tag{28}$$

$$K\,(M, \varepsilon_1) \supset \overline{K}\,(M, \varepsilon_2) \tag{29}$$

Es folgt (31), (32) aus der Dreiecksungleichung für den Abstand

$$d\,(M, q) \leqq d\,(M, p) + d\,(p, q) \tag{30}$$

$$U\,[U\,(M, \varepsilon_1), \varepsilon_2] \subset U\,[M, \varepsilon_1 + \varepsilon_2] \tag{31}$$

$$\overline{U}\,[\overline{U}\,(M, \varepsilon_1), \varepsilon_2] \subset \overline{U}\,[M, \varepsilon_1 + \varepsilon_2] \tag{32}$$

und im Hinblick auf (22) und (23)

$$K\,[K\,(M, \varepsilon_1), \varepsilon_2] \supset K\,[M, \varepsilon_1 + \varepsilon_2] \tag{33}$$

$$U\,[K\,(M, \varepsilon_2), \varepsilon_1] \subset K\,[M, \varepsilon_2 - \varepsilon_1] \tag{34}$$

Beweis zu (34): Es sei p aus $U\,[K\,(M, \varepsilon_2), \varepsilon_1]$. D. h. $d\,[p, K(M, \varepsilon_2)] < \varepsilon_1$. Daher gibt es Punkte p' aus $K\,(M, \varepsilon_2)$, für die

$$d\,(p, p') < \varepsilon_1 \tag{a}$$

ist. Da p' in $K\,(M, \varepsilon_2) = R - \overline{U}\,(R{-}M, \varepsilon_2)$ liegt, gilt nicht

---

[8] Jede Umgebung der leeren Menge sei leer.

$$d(p', R—M) \leqq \varepsilon_2;$$

also

$$d(p', R—M) > \varepsilon_2 \text{ für alle } p' \tag{b}$$

Wegen (30) gilt $d(p, R—M) \geqq d(p', R—M) — d(p, p')$. Daraus folgt wegen (a) und (b) $d(p, R—M) > \varepsilon_2 — \varepsilon_1$. p gehört nicht zur Menge der Punkte, für die $d(p, R—M) \leqq \varepsilon_2 — \varepsilon_1$. p ist also Element vom $R — \overline{U}(R—M, \varepsilon_2 — \varepsilon_1) = K(M, \varepsilon_2 — \varepsilon_1)$.

Satz 3: Ist $\{M_n\}$ eine Folge von Mengen M_n und gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches n_0, daß für eine offene Menge M $K(M, \varepsilon) \subset M_n$ ist für alle $n > n_o$, dann gilt $o\text{-}\overline{\lim_n} M_n \supset M$.

Beweis: Der Punkt p sei aus M. Da M offen ist, gibt es eine Umgebung $U(p, 2\varepsilon')$, die in M enthalten ist. Wegen (31) gilt deshalb $U[U(p, \varepsilon'), \varepsilon'] \subset U(p, 2\varepsilon') \subset M$. Daraus folgt unter Berücksichtigung der Definition 12 $U(p, \varepsilon') \subset \overline{K}[M, \varepsilon']$. Für jedes $\varepsilon < \varepsilon'$ gilt im Hinblick auf (29) und die vorausgesetzte Bedingung $K[M, \varepsilon] \subset M_n$ für $n > n_0$ $U(p, \varepsilon') \subset M_n$. Das bedeutet nach Definition 1, daß p Element von $o\text{-}\overline{\lim_n} M_n$ ist.

Unter Verwendung der Komplemente und der Formeln (23) und (17) leitet man aus Satz 3 den folgenden Satz her.

Satz 4: Ist $\{M_n\}$ eine Folge von Mengen M_n und gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches n_0, daß für eine abgeschlossene Menge M $\overline{U}(M, \varepsilon) \supset M_n$ ist für alle $n > n_0$, dann gilt $a\text{-}\overline{\lim_n} M_n \subset M$.

Satz 5: Sind die Mengen M_n der Folge $\{M_n\}$ Teilmengen eines kompakten Raumes R, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches n_o, daß $\overline{K}[M_n, \varepsilon] \subset [a\text{-}\overline{\lim_n} M_n]_o$ für $n > n_o$.

Beweis: p sei nicht aus $[a\text{-}\overline{\lim_n} M_n]_o$. p ist also Element von $R — [a\text{-}\overline{\lim_n} M_n]_o$ und wegen (5) auch von $[R — a\text{-}\overline{\lim_n} M_n]_a$ und schließlich wegen (17) auch von $[o\text{-}\overline{\lim_n}(R—M_n)]_a$. Zu jedem p' aus $o\text{-}\overline{\lim_n}(R—M_n)$ gibt es eine Umgebung $U_{p'} \subset U(p', \frac{\varepsilon}{2})$, die gemäß Definition 1 Teilmenge von $R—M_n$ ist für $n > n_{p'}$. Die Punkte p'' aus $[o\text{-}\overline{\lim_n}(R—M_n)]_a — o\text{-}\overline{\lim_n}(R—M_n)$ sollen mit einer Umgebung

$U(p'', \frac{\varepsilon}{2})$ versehen werden. Diese Umgebungen $U_{p'}$ und $U(p'', \frac{\varepsilon}{2})$ überdecken die in sich kompakte Menge $[o\text{-}\overline{\lim_n}(R—M_n)]_a$. Nach dem Überdeckungssatz genügen schon endlich viele davon zur Überdeckung, nämlich die Umgebungen $U(p_i')$ und $U(p_j'')$, wobei die p_i' aus $o\text{-}\overline{\lim_n}(R-M_n)$ und die p_j'' aus $[o\text{-}\overline{\lim_n}(R-M_n)]_a - o\text{-}\overline{\lim_n}(R—M_n)$ sein sollen.

a) Der angenommene Punkt p sei in einem $U(p_j'')$ enthalten. Dann ist $d(p, p_j'') < \frac{\varepsilon}{2}$. Ferner gibt es einen Punkt q_j' aus $o\text{-}\overline{\lim_n}(R—M_n)$, so daß $d(p_j'', q_j') < \frac{\varepsilon}{2}$, da p_j'' Häufungspunkt von $o\text{-}\overline{\lim_n}(R—M_n)$ ist. Wegen (30) gilt nun $d(p, q_j') < \varepsilon$; d. h. p ist aus $U(q_j', \varepsilon)$. Aus der Definition 1 folgt, daß q_j' in $R—M_n$ enthalten ist, wenn $n > n_j$ ist. Daher gilt $U(q_j', \varepsilon) \subset U(R—M_n, \varepsilon)$ für $n > n_j$ und schließlich, daß p Element von $U(R—M_n, \varepsilon)$ ist.

b) Der angenommene Punkt p sei in einem $U(p_i')$ enthalten. p ist also aus $o\text{-}\overline{\lim_n}(R—M_n)$; d. h. p ist nach Definition 1 ebenfalls Element von $U(R—M_n, \varepsilon)$ für $n > n_i$.

Ist also n größer als das Maximum n_o der endlich vielen Zahlen n_i und n_j, dann ist für alle Fälle p aus $U(R—M_n, \varepsilon)$. p ist also nicht aus $R - U(R—M_n, \varepsilon) = \overline{K}(M_n, \varepsilon)$, wenn $n > n_o$ ist.

Entsprechend beweist man den

Satz 6: Sind die Mengen M_n der Folge $\{M_n\}$ Teilmengen eines kompakten Raumes R, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches n_o, daß $U(M_n, \varepsilon) \supset [o\text{-}\overline{\lim_n} M_n]_a$.

Satz 7: Ist $F(a)$ in a unterhalb stetig und sind alle Werte der Funktion Teilmengen eines kompakten Raumes R, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, für das $\overline{K}[F(a), \varepsilon] \subset F(a')$, sobald $d(a, a') < \delta$ ist.

Beweis: Nach Definition 8 gilt für jede gegen a konvergierende Punktfolge $\{a_n\}$ $o\text{-}\overline{\lim_n} F(a_n) \supset F(a)_o$. Es ist also für jeden Punkt p aus $F(a)_o$ $U_p \subset F(a_n)$, sobald $n > n_p$ nach Definition 1. Ist p' aus $\overline{K}[F(a), \varepsilon] \subset K[F(a), \varepsilon/2] \subset F(a)_o$ (vgl. (29) und Def. 12), dann ist ebenfalls ein $U_{p'} \subset F(a_n)$, sobald $n > n_{p'}$ ist. Schon endlich viele

$U_{p'}$ überdecken $\overline{K}\,[F(a), \varepsilon]$, da $\overline{K}\,[F(a), \varepsilon]$ in sich kompakt ist. Die größte der endlich vielen Zahlen $n_{p'_i}$ sei n_o. Es gilt für jedes der endlich vielen i $U_{p'_i} \subset F(a_n)$, sobald $n > n_o$ ist. Also folgt für $n > n_o$ $\overline{K}\,[F(a), \varepsilon] \subset \subset \underset{i}{V}\, U_{p'} \subset F(a_n)$ und schließlich für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ $\overline{K}\,[F(a), \varepsilon] \subset F(a')$, sobald $d(a, a') < \delta$ ist.

Entsprechend beweist man den

Satz 8: Ist $F(a)$ in a oberhalb stetig und sind alle Werte der Funktion Teilmengen eines kompakten Raumes, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, für das $U\,[F(a), \varepsilon] \supset F(a')$, sobald $d(a, a') < \delta$ ist.

§ 4. Bildung halbstetiger und stetiger Funktionen.

Satz 9: Das Komplement einer im engeren bzw. weiteren Sinne oberhalb stetigen Funktion ist im engeren bzw. weiteren Sinne unterhalb stetig.

Beweis: a) $F(a)$ sei im engeren Sinne oberhalb stetig. Für jede gegen a konvergierende Folge $\{a_n\}$ gilt also gemäß Definition 7:

$$a - \overline{\lim_n} F(a_n) \subset F(a)_a \text{ und } F(a)_{ao} = F(a)$$

(offen) bzw. $F(a)_{oa} = F(a)$ (abgeschlossen). Wir bilden die Komplemente dieser Mengen, berücksichtigen (17), (6) und (5) und erhalten die beiden Bedingungen für die Unterhalbstetigkeit von $R—F(a)$ gemäß Definition 8:

$$o - \overline{\lim_n}\,[R—F(a_n)] = R — a - \overline{\lim_n} F(a_n) \supset R—F(a)_a = [R—F(a)]_o,$$

$$[R—F(a)]_{ao} = [R—F(a)_o]_o = R—F(a)_{oa} = R—F(a),$$

wenn $F(a)$ abgeschlossen ist. Wenn $F(a)$ offen ist gilt bzw.

$$[R—F(a)]_{oa} = [R—F(a)_a]_a = R—F(a)_{ao} = R—F(a).$$

b) $F(a)$ sei im weiteren Sinne oberhalb stetig. Gemäß Definition 9 gilt $[a - \overline{\lim_n} F(a_n)]_o \subset F(a)$. Wir bilden die Komplemente und erhalten im Hinblick auf (17) und (5) die Bedingung für die Unterhalbstetigkeit von $R—F(a)$ gemäß Definition 10:

$$[o\text{-}\overline{\lim_n}\,(R\text{–}F(a_n))]_a = [R—a - \overline{\lim_n} F(a_n)]_a = R—[a - \overline{\lim_n} F(a_n)]_o \supset R\text{–}F(a).$$

Entsprechend beweist man den

Satz 10: Das Komplement einer im engeren bzw. weiteren Sinne unterhalb stetigen Funktion ist im engeren bzw. weiteren Sinne oberhalb stetig.

Satz 11: Die abgeschlossene Hülle einer im engeren bzw. weiteren Sinne oberhalb stetigen Funktion ist oberhalb stetig im engeren bzw. weiteren Sinne.

Beweis: a) $F(a)$ sei nach Definition 7 oberhalb stetig im engeren Sinne. Es gilt daher $a - \overline{\lim_n} F(a_n) \subset F(a)_a$ und $F(a)_{ao} = F(a)$, wenn $F(a)$ offen ist. Für abgeschlossene $F(a)$ ist der Satz 11 selbstverständlich. Aus der Ungleichung folgt wegen (15) $a - \overline{\lim_n} F(a_n)_a \subset F(a)_a =$ $= [F(a)_a]_a$. Wegen (3) ist die 2. Bedingung $[F(a)_a]_{oa} = F(a)_a$ für die Oberhalbstetigkeit von $F(a)_a$ ebenfalls erfüllt, wenn man $F(a) = M_o$ setzt.

b) $F(a)$ sei nach Definition 9 oberhalb stetig im weiteren Sinne. Es gilt also $[a - \overline{\lim_n} F(a_n)]_o \subset F(a)$, woraus mit Rücksicht auf (15) und $F(a) \subset F(a)_a$

$$[a - \overline{\lim_n} F(a_n)_a]_o \subset F(a)_a$$

folgt.

Satz 12: Der offene Kern einer im engeren bzw. weiteren Sinne unterhalb stetigen Funktion ist unterhalb stetig im engeren bzw. weiteren Sinne.

Beweis: Wir bilden das Komplement $R - F(a)_o$ des offenen Kernes $F(a)_o$. Dieses ist wegen (5) als abgeschlossene Hülle des Komplementes $R - F(a)$ nach den Sätzen 10 und 11 oberhalb stetig. Der offene Kern $F(a)_o$ selbst ist als Komplement von $R - F(a)_o$ wegen Satz 9 unterhalb stetig.

Satz 13: Die abgeschlossene Hülle einer im engeren bzw. weiteren Sinne unterhalb stetigen Funktion ist unterhalb stetig im engeren bzw. weiteren Sinne.

Beweis: a) Bei abgeschlossenen $F(a)$ erhält man keine neue Funktion, also sei $F(a)$ offen und im engeren Sinne unterhalb stetig. Es gilt daher nach Definition 8:

$$o - \overline{\lim_n} F(a_n) \supset F(a)_o \text{ und } F(a)_{ao} = F(a) = F(a)_o.$$

Da

$$F(a_n)_a \supset F(a_n), \text{ folgt } o - \overline{\lim_n} F(a_n)_a \supset F(a)_o = [F(a)_a]_o.$$

Ferner folgt die 2. Bedingung $[F(a)_a]_{oa} = F(a)_a$ mit Rücksicht auf (3).

b) $F(a)$ sei unterhalb stetig im weiteren Sinne. Es gilt daher $[o\text{-}\overline{\lim_n} F(a_n)]_a \supset F(a)$. Da $F(a_n)_a \supset F(a_n)$ für jedes n, folgt $[o\text{-}\overline{\lim_n} F(a_n)_a]_a \supset F(a)$ und weil $F(a)_a$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von $F(a)$ ist, gilt schließlich $[o\text{-}\overline{\lim_n} F(a_n)_a]_a \supset F(a)_a$.

Mit Hilfe der Komplemente, der Sätze 9, 10 und 13 und der Formel (5) beweist man den

Satz 14: Der offene Kern einer im engeren bzw. weiteren Sinne oberhalb stetigen Funktion ist oberhalb stetig im engeren bzw. weiteren Sinne.

Satz 15: Die Vereinigung endlich vieler im engeren bzw. weiteren Sinne oberhalb stetiger Funktionen mit abgeschlossenen Werten ist oberhalb stetig im engeren bzw. weiteren Sinne.

Beweis: a) $F_k(a)$ sollen endlich viele im engeren Sinne oberhalb stetige Funktionen mit abgeschlossenen Werten sein. Also gilt für jede gegen a konvergierende Folge $\{a_n\}$ $a\text{-}\overline{\lim_n} F_k(a_n) \subset F_k(a)_a = F_k(a)$ und $F_k(a)_{oa} = F_k(a)$.

Aus (18) und (7) ergibt sich die 1. Bedingung für die Oberhalbstetigkeit der Vereinigung $\underset{k}{V} F_k(a)$:

$$a\text{-}\overline{\lim_n} \underset{k}{V} F_k(a_n) = \underset{k}{V}\, a\text{-}\overline{\lim_n} F_k(a_n) \subset \underset{k}{V} F_k(a)_a = [\underset{k}{V} F_k(a)]_a.$$

Die 2. Bedingung $[\underset{k}{V} F_k(a)]_{oa} = \underset{k}{V} F_k(a)$ ergibt aus (12) und (14) wie folgt: $\underset{k}{V} F_k(a)_o \subset [\underset{k}{V} F_k(a)]_o \subset [\underset{k}{V} F_k(a)_o]_a$. Wir bilden die abgeschlossenen Hüllen dieser drei Mengen und stellen fest, daß die erste und die dritte Menge gleich sind. Es sind also alle drei abgeschlossenen Hüllen gleich. Mit Rücksicht auf (7) folgt schließlich

$$[\underset{k}{V} F_k(a)]_{oa} = [\underset{k}{V} F_k(a)_o]_a = \underset{k}{V} F_k(a)_{oa} = \underset{k}{V} F_k(a).$$

b) Nun seien die $F_k(a)$ im weiteren Sinne oberhalb stetig. Für jedes k gilt also $[a\text{-}\overline{\lim_n} F_k(a_n)]_o \subset F_k(a)$. Wir bilden die Vereinigung über k $\underset{k}{V} [a\text{-}\overline{\lim_n} F_k(a_n)]_o \subset \underset{k}{V} F_k(a)$. Da die Vereinigung der endlich vielen abgeschlossenen Mengen $F_k(a)$ abgeschlossen und die abgeschlossene Hülle die kleinste abgeschlossene Obermenge ist, folgt

$$(\underset{k}{V}\,[a - \overline{\lim_{n}}\, F_k(a_n)]_o)_a \subset \underset{k}{V}\, F_k(a).$$

Im Hinblick auf (18) und (14) ergibt sich schließlich

$$[a - \overline{\lim_{n}}\, \underset{k}{V}\, F_k(a_n)]_o = [\underset{k}{V}\, a - \overline{\lim_{n}}\, F_k(a_n)]_o \subset (\underset{k}{V}\,[a - \overline{\lim_{n}}\, F_k(a_n)]_o)_a \subset \underset{k}{V}\, F_k(a).$$

$\underset{k}{V}\, F_k(a)$ ist also gemäß Definition 9 oberhalb stetig im weiteren Sinne.

Satz 16: Der Durchschnitt endlich vieler im engeren bzw. weiteren Sinne unterhalb stetiger Funktionen mit offenen Werten ist unterhalb stetig im engeren bzw. weiteren Sinne.

Beweis: $\underset{k}{D}\, F_k(a)$ ist unterhalb stetig, da $\underset{k}{D}\, F_k(a) = R - \underset{k}{V}\,[R - F_k(a)]$, $\underset{k}{V}\,[R - F_k(a)]$ wegen des Satzes 15 oberhalb und $R - \underset{k}{V}\,[R - F_k(a)]$ wegen des Satzes 9 unterhalb stetig ist.

Satz 17: Der Durchschnitt endlich oder unendlich vieler im weiteren Sinne oberhalb stetiger Funktionen ist oberhalb stetig im weiteren Sinne.

Beweis: Alle Funktionen $F_k(a)$ seien oberhalb stetig im weiteren Sinne, für jede gegen a konvergierende Folge $\{a_n\}$ gilt daher

$$[a - \overline{\lim_{n}}\, F_k(a_n)]_o \subset F_k(a).$$

Wir bilden auf beiden Seiten den Durchschnitt über k und verwenden die Formeln (20) und (10):

$$[a - \overline{\lim_{n}}\, \underset{k}{D}\, F_k(a_n)]_o \subset [\underset{k}{D}\, a - \overline{\lim_{n}}\, F_k(a_n)]_o \subset \underset{k}{D}\, [a - \overline{\lim_{n}}\, F_k(a_n)]_o \subset \underset{k}{D}\, F_k(a).$$

Indem man die beiden mittleren Glieder wegläßt, erhält man die Bedingung für die Oberhalbstetigkeit von $\underset{k}{D}\, F_k(a)$.

Satz 18: Die Vereinigung endlich oder unendlich vieler im weiteren Sinne unterhalb stetiger Funktionen ist unterhalb stetig im weiteren Sinne.

Beweis: Dieser Satz folgt aus den Sätzen 10b, 17 und 9b, denn die Vereinigung ist das Komplement des Durchschnittes der Komplemente.

Satz 19: Ist $F(a)$ i. w. S.[9] oberhalb stetig und $G(a)$ i. w. S. unterhalb stetig, so ist die Differenz $F(a) - G(a)$ i. w. S. oberhalb stetig.

---

[9] „i. w. S." bedeutet „im weiteren Sinne".

Beweis: $F(a) - G(a) = F(a) - F(a) \,.\, G(a) = F(a) \,.\, [R - G(a)] \,.$ $R - G(a)$ ist nach Satz 10b, $F(a) \,.\, [R - G(a)]$ nach Satz 17 i. w. S. oberhalb stetig.

Satz 20: Ist $F(a)$ oberhalb stetig[10] und abgeschlossen und $G(a)$ unterhalb stetig[10] und offen, so ist die Differenz $G(a) - F(a)$ unterhalb stetig[10].

Beweis: $G(a) - F(a) = G(a) - G(a) \,.\, F(a) = G(a) \,.\, [R - F(a)]$. $R - F(a)$ ist nach Satz 9 unterhalb stetig, ferner offen. Der Durchschnitt $G(a) \,.\, [R - F(a)]$ ist nach Satz 16 unterhalb stetig[10].

Definition 14: Die *untere Grenze* $H(F, a)$ einer beliebigen Funktion $F(a)$ im Punkte a ist die Menge der Punkte, zu denen es solche positive Zahlen ε und δ gibt, daß für $d(a, a') < \delta$ $U(p, \varepsilon) \subset F(a')$ ist.

$H(F, a)$ ist eine Funktion von a mit offenen Werten.

$$H(F, a) \subset F(a). \tag{35}$$

Satz 21: $F(a)$ ist unterhalb stetig, wenn $H(F, a) = F(a)_o$ und $F(a)_{ao} = F(a)$ bzw. $F(a)_{oa} = F(a)$ ist.

Beweis: Im Hinblick auf die Definition 1 und 14 gilt für jede gegen a konvergierende Punktfolge $\{a_n\}$ $o\text{-}\overline{\lim_{n}} F(a_n) \supset H(F, a)$. Das ergibt zusammen mit den Voraussetzungen des Satzes 21 die beiden Bedingungen für die Unterhalbstetigkeit von $F(a)$ gemäß Definition 8.

Satz 22: Die untere Grenzfunktion $H(F, a)$ einer beliebigen Funktion $F(a)$ ist i. w. S. unterhalb stetig.

Beweis: Wir zeigen zuerst:

$$o\text{-}\overline{\lim_{a \to \bar{a}}} H(F, a) \supset H(F, \bar{a}). \tag{a}$$

p sei aus $H(F, \bar{a})$. Das heißt: es gibt ein $\varepsilon' > 0$ und ein $\delta' > 0$, so daß

$$U(p, \varepsilon') \subset F(a'), \text{ sobald } d(\bar{a}, a') < \delta'. \tag{b}$$

$H(F, a)$ ist die Menge der Punkte p'', für die es solche positive Zahlen ε'' und δ'', die die Bedingung $\varepsilon'' < \frac{\varepsilon'}{2}$ und $\delta'' < \frac{\delta'}{2}$ erfüllen sollen, gibt, daß

$$U(p'', \varepsilon'') \subset F(a''), \tag{c}$$

sobald $d(a, a'') < \delta'' < \frac{\delta'}{2}$. Es sei a aus $U(\bar{a}, \frac{\delta'}{2})$, dann ist wegen (30)

[10] Im engeren bzw. weiteren Sinne.

$$d(\bar{a}, a'') < \delta'. \tag{d}$$

Vergleichen wir (c) und (d) mit (b), so sehen wir, daß p Element von $H(F, a)$ ist, sobald a in $U(\bar{a}, \frac{\delta'}{2})$ liegt. Es sind sogar alle Punkte p' aus $U(p, \frac{\varepsilon'}{2})$ Elemente von $H(F, a)$, denn wegen (31) gilt $U(p', \varepsilon'') \subset$ $\subset U(p', \frac{\varepsilon'}{2}) \subset U[U(p, \frac{\varepsilon'}{2}), \frac{\varepsilon'}{2}] \subset U(p, \varepsilon')$. $U(p, \frac{\varepsilon'}{2})$ ist also Teilmenge von $H(F, a)$, sobald a aus $U(\bar{a}, \frac{\delta'}{2})$ ist. Laut Definition 1 ist daher p Punkt von $o\text{-}\lim_{\overline{a \to \bar{a}}} H(F, a)$. Damit ist (a) bewiesen, woraus unmittelbar die Bedingung für die Unterhalbstetigkeit i. w. S. folgt:

$$[o\text{-}\lim_{\overline{a \to \bar{a}}} H(F, a)]_a \supset H(F, \bar{a}).$$

Satz 22a: Die untere Grenzfunktion $H(F, a)$ einer beliebigen Funktion $F(a)$ ist unterhalb stetig, wenn $H(F, a)_{ao} = H(F, a)$ ist.

Beweis: Die Formel (a) aus Satz 22 gibt die erste Bedingung für die Unterhalbstetigkeit nach der Definition 8:

$$o\text{-}\lim_{\overline{a \to \bar{a}}} H(F, a) \supset H(F, a)_o.$$

Die zweite Bedingung wurde vorausgesetzt.

Definition 15: Die *obere Grenze* $G(F, a)$ einer beliebigen Funktion $F(a)$ im Punkte a ist die Menge der Punkte p, von denen jede Umgebung U_p für mindestens ein a' aus einer beliebig kleinen Umgebung von a mit $F(a')$ Punkte gemeinsam hat. $G(F, a)$ ist eine Funktion von a mit abgeschlossenen Werten.

$$G(F, a) \supset F(a) \tag{36}$$

$$R - G(F, a) = H(R - F, a) \tag{37}$$

Beweis zu (37): Ist p nicht aus $G(F, a)$, so gibt es ein $\delta > 0$ und eine Umgebung $U(p, \varepsilon)$, die für kein a' aus $U(a, \delta)$ mit $F(a')$ Punkte gemeinsam hat. Also ist $U(p, \varepsilon) \cdot F(a')$ leer für $d(a, a') < \delta$, oder $U(p, \varepsilon) \subset R - F(a')$ für $d(a, a') < \delta$. Laut Definition 14 ist also p Punkt aus $H(R-F, a)$.

Unter Verwendung der Komplemente und (37) erhält man aus den Sätzen 21, 22 und 22a die Sätze 23, 24 und 24a:

Satz 23: $F(a)$ ist oberhalb stetig, wenn $G(F, a) = F(a)_a$ und $F(a)_{ao} = F(a)$ bzw. $F(a)_{oa} = F(a)$ ist.

Satz 24: Die obere Grenzfunktion $G(F, a)$ einer beliebigen Funktion $F(a)$ ist i. w. S. oberhalb stetig.

Satz 24a: Die obere Grenzfunktion $G(F, a)$ einer beliebigen Funktion $F(a)$ ist oberhalb stetig, wenn $G(F, a)_{oa} = G(F, a)$.

Satz 25: Sind $A \subset B$ offene Teilmengen eines metrischen, separablen, in sich dichten Raumes R, für die $A = A_{ao}$ und $B = B_{ao}$ gilt, wobei A auch leer sein kann, so gibt es eine auf der abgeschlossenen Streckeneinheit $[0, 1]$ i. w. S. stetige Funktion $P(x)$ mit $P(0) = A$ und $P(1) = B$.

Beweis: Es sei eine Folge positiver Zahlen ε_i mit $\lim_i \varepsilon_i = 0$ vorgegeben. Daraus konstruieren wir eine Folge von Mengensystemen. Das System 0 enthalte nur A und B. Zum System 1 kommen wir, indem wir um alle Punkte p aus B_a die Umgebungen $U(p, \varepsilon_1)$ bilden. Da R separabel ist, gibt es davon abzählbar viele $U(p_k^1, \varepsilon_1)$, die B_a überdecken. U_1^1 sei die erste der Umgebungen $B \,.\, U(p_k^1, \varepsilon_1)$, die auch Punkte von $R—A$ enthält. U_1^1 kann auch $B \,.\, U(p_1^1, \varepsilon_1)$ sein, was zutrifft, wenn A leer ist. Damit bilden wir $M_1^1 = (A + U_1^1)_{ao}$. U_2^1 sei die erste der Umgebungen $B \,.\, U(p_k^1, \varepsilon_1)$, die auch Punkte von $R—M_1^1$ enthält. Damit bilden wir $M_2^1 = (M_1^1 + U_2^1)_{ao}$; usw. Allgemein definieren wir durch transfinite Induktion $M_{\mu'}^1 = (V_{\xi<\mu} M_\xi^1 + U_{\mu'}^1)_{ao}$, wobei $U_{\mu'}^1$ die erste der Umgebungen $B \,.\, U(p_k^1, \varepsilon_1)$ ist, die Punkte von $R - V_{\xi<\mu} M_\xi^1$ enthält. Ferner gilt $M_\xi^1 \subset B$, $U_{\mu'}^1 \subset B$, also auch $V_{\xi<\mu} M_\xi^1 + U_{\mu'}^1 \subset B$, woraus folgt $M_{\mu'}^1 = (V_{\xi<\mu} M_\xi^1 + U_{\mu'}^1)_{ao} \subset B_{ao} = B$. Die erste Ordnungszahl, für die $M_{\mu'}^1 = B$ ist, sei μ''. Das System 1 lautet also $A = M_0^1 \subset M_1^1 \subset \ldots \subset M_\mu^1 \subset M_{\mu+1}^1 \subset \ldots \subset B = M_{\mu''}^1$.

In entsprechender Weise bildet man das System 2, indem man zwischen M_μ^1 und $M_{\mu+1}^1$ weitere Mengen M_ν^2 einschiebt, usw.

Das System i besteht aus den Mengen

$$M_0^i = A,\ M_\mu^i = (V_{\xi<\mu} M_\xi^i + U_{\mu'}^i)_{ao}. \tag{a}$$

Dabei sei $U_{\mu'}^i$ die erste der Umgebungen $M_{\mu''}^{i-1} \,.\, U(p_k^i, \varepsilon_i)$, die auch Punkte von $V_{\xi<\mu} M_\xi^i$ enthält, $M_{\mu''}^{i-1}$ die erste der Mengen $M_{\mu'}^{i-1}$, die echte Obermenge von $V_{\xi<\mu} M_\xi^i$ ist und $U(p_k^i, \varepsilon_i)$ eine Umgebung einer abzählbaren Überdeckungsfolge von B_a. Wegen $V_{\xi<\mu} M_\xi^i \subset M_{\mu''}^{i-1}$ und $U_{\mu'}^i \subset M_{\mu''}^{i-1}$ gilt mit Rücksicht auf (a) und (4)

$$M^i_\mu = (\underset{\xi<\mu}{V} M^i_\xi + U^i_\mu)_{ao} \subset (M^{i-1}_{\mu'})_{ao} = M^{i-1}_{\mu'}.$$

$$A = M^i_0 \subset \ldots \subset M^i_\mu \subset M^i_{\mu+1} \subset \ldots \subset M^i_{\mu''} = M^{i-1}_{\mu'} \subset \ldots \subset B = M^i_{\mu'''}.$$

Dieses Mengensystem i ist durch die Relation $\subset$ wohlgeordnet und daher höchstens abzählbar, da R separabel ist. Die Vereinigung aller Systeme i gibt ein durch die Relation $\subset$ überall dicht geordnetes System, das durch A und B begrenzt ist. Es gibt daher eine derartige ein-eindeutige Zuordnung $P(r)$ zwischen den rationalen Zahlen r aus $[0, 1]$ und den Mengen M^i_μ dieses Systems, daß $P(0) = A$, $P(1) = B$ und

$$P(r) \subset P(r'), \text{ wenn } r < r'. \tag{b}$$

Die rationale Zahl, die der Menge M^i_μ zugeordnet ist, heiße r^i_μ. Aus (a) folgt unter Berücksichtigung von (4)

$$P(r) = P(r)_{ao} \tag{c}$$

$r > 0$ sei eine rationale Zahl aus $(0, 1]$. Da die Menge der r^i_μ des Systems i wohlgeordnet ist, gibt es eine erste unter den Zahlen $r^i_\mu > r$, die wir r_i' nennen wollen:

$$r < r_i' \tag{d}$$

Wenn r ein r^i_μ des Systems i ist, folgt unmittelbar aus (a)

$$P(r) = M^i_\mu = (\underset{\xi<\mu}{V} M^i_\xi + U^i_\mu)_{ao} \subset [\underset{r^i_\xi < r}{V} P(r^i_\xi) + U(p^i_k, \varepsilon_i)]_{ao},$$

da $U^i_\mu \subset U(p^i_k, \varepsilon_i)$ ist. Dieselbe Beziehung für $P(r)$ gilt auch, wenn r kein r^i_μ ist, denn aus (a) folgt $P(r_i') \subset [\underset{r^i_\mu < r}{V} P(r^i_\mu) + U(p^i_k, \varepsilon_i)]_{ao}$. Da wegen (d) $P(r) \subset P(r_i')$ ist, gilt also für jedes rationale r $P(r) \subset [\underset{r^i_\mu < r}{V} P(r^i_\mu) + U(p^i_k, \varepsilon_i)]_{ao}$. Daraus folgt im Hinblick auf (7) für jedes i

$$P(r) \subset [\underset{r^i_\mu < r}{V} P(r^i_\mu)]_a + U(p^i_k, \varepsilon_i)_a, \; P(r) \subset \underset{i}{V} [\underset{r^i_\mu < r}{V} P(r^i_\mu)]_a + U(p^i_k, \varepsilon_i)_a$$

und wegen (9) $P(r) \subset [\underset{i}{V} \underset{r^i_\mu < r}{V} P(r^i_\mu)]_a + U(p^i_k, \varepsilon_i)_a$ für jedes i. Da $\lim_i \varepsilon_i = 0$, kann $P(r)$ höchstens um einen Punkt p mehr enthalten als

$$[\underset{i}{V} \underset{r^i_\mu < r}{V} P(r^i_\mu)]_a:$$

$$P(r) \subset [\underset{i}{V} \underset{r^i_\mu < r}{V} P(r^i_\mu)]_a + p. \tag{e}$$

Da die r^i_μ auf $[0, 1]$ überall dicht liegen, gibt es eine zunehmende Folge

$\{r_i\}$ mit $\lim_i r_i = r$. Die Mengen $P(r_i)$ sind offen und vergleichbar, es gilt daher $o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i) = \bigvee_i P(r_i) = \bigvee_i \bigvee_{r_\mu^i < r} P(r_\mu^i)$ und auch

$$[o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i)]_a = [\bigvee_i \bigvee_{r_\mu^i < r} P(r_\mu^i)]_a.$$

Dazu geben wir die Menge p, die aus einem Punkt besteht, oder leer ist, und erhalten im Hinblick auf (e) $[o\text{-}\lim P(r_i)]_a + p \supset P(r)$. Davon bilden wir den offenen Kern:

$$\{[o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i)]_a + p\}_o \supset P(r)_o = P(r). \tag{f}$$

Wir zeigen nun $\{[o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i)]_a + p\}_o = [o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i)]_{ao}$. (g) Ist p aus $[o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i)]_a$, dann gilt (g); ist p nicht aus $[o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i)]_a$, dann ist p Häufungspunkt von $R - \{[o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i)]_a + p\}$, da R in sich dicht ist. p ist also nicht innerer Punkt von $[o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i)]_a + p$, woraus wieder (g) folgt. (g) und (f) ergeben

$$[o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i)]_a \supset P(r). \tag{h}$$

Wir erweitern die Funktion $P(r)$ auf alle irrationalen Punkte s aus $[0, 1]$:

$$P(s) = [o\text{-}\overline{\lim_i} P(r_i)]_{ao} = [\bigvee_i P(r_i)]_{ao}, \tag{i}$$

$$\text{wobei } r_i < s < r_i', \tag{k}$$

$\lim_i r_i = s$ und r_i' die erste der Zahlen $r_\mu^i > s$ ist, die wegen der Wohlordnung des Systems i existiert. Aus (i) und (k) folgt

$$P(r_i) \subset P(s), \text{ wenn } r_i < s. \tag{l}$$

Wir beweisen nun

$$P(s) \subset P(r_i'), \text{ wenn } s < r_i'. \tag{m}$$

Wegen (b) ist für $r_i < r_i'$ $P(r_i) \subset P(r_i')$ und $\bigvee_i P(r_i) \subset P(r_i')$ und wegen (i) und (c) $P(s) = [\bigvee_i P(r_i)]_{ao} \subset P(r_i')_{ao} = P(r_i')$.

Ist $\{x_n\}$ eine beliebige Folge rationaler oder irrationaler Zahlen aus $[0, 1]$ mit $\lim x_n = x$, so gibt es eine Folge rationaler Zahlen r_i mit

$r_{i\,(n)} < x$, $\lim\limits_{n} i\,(n) = \infty$ und $\lim\limits_{n} r_{i\,(n)} = x$. Da wegen (b) und (1) $P\,(x_n) \supset P\,(r_{i\,(n)})$ ist, folgt aus (h) und (i)

$$[o\text{-}\overline{\lim_{n}}\ P\,(x_n)]_a \supset [o\text{-}\overline{\lim_{n}}\ P\,(r_{i(n)})]_a \supset P\,(x).$$

Diese Ungleichung gilt auch für $x = 0$ wegen $P\,(x_n) \supset P\,(0)$. $P\,(x)$ ist also auf $[0, 1]$ i. w. S. unterhalb stetig.

Zum Beweis der Oberhalbstetigkeit sei ein beliebiges rationales oder irrationales $x < 1$ aus $[0, 1)$ gegeben, wozu wegen (d) bzw. (k) ein erstes $r^i_\mu > x$ existiert, das wir r_i' nennen wollen:

$$x < r_i'. \tag{n}$$

Nach (a) ist $P\,(r_i') = M^i_\mu = (V_{\xi<\mu}\ M^i_\xi + U^i_\mu)_{ao} = [V_{r^i_\xi < x}\ P\,(r^i_\xi) + U^i_\mu]_{ao}$.

Wegen $U^i_\mu \subset U\,(p^i_k, \varepsilon_i)$, (b) und (l) folgt im Hinblick auf (7)

$$P\,(r_i') \subset [P\,(x) + U\,(p^i_k, \varepsilon_i)]_a = P\,(x)_a + U\,(p^i_k, \varepsilon_i)_a,$$

$$D_i\ P\,(r_i') \subset D_i\,[P\,(x)_a + U\,(p^i_k, \varepsilon_i)_a] = P\,(x)_a + p, \tag{o}$$

wobei $p = D_i\ U\,(p^i_k, \varepsilon_i)_a$ wegen $\lim\limits_{i} \varepsilon_i = 0$ höchstens aus einem Punkt p bestehen kann. Wie bei (g) zeigt man

$$[P\,(x)_a + p]_o = P\,(x)_{ao}. \tag{p}$$

Da die $P\,(r_i')_a$ wegen (n) und (b) abgeschlossene Mengen einer abnehmenden Folge sind, gilt $a\text{-}\overline{\lim\limits_{i}}\ P\,(r_i')_a = D_i\ P\,(r_i')_a$. Wir bilden davon den offenen Kern und berücksichtigen (15) und (10)

$$[a\text{-}\overline{\lim_{i}}\ P\ (r_i')]_o = [a\text{-}\overline{\lim_{i}}\ P\,(r_i')_a]_o = [D_i\ P\,(r_i')_a]_o \subset D_i\ P\,(r_i')_{ao}.$$

Wegen (c) und (o) folgt daraus $[a\text{-}\overline{\lim\limits_{i}}\ P\,(r_i')]_o \subset D_i\ P\,(r_i') \subset P\,(x)_a + p$. Wir bilden den offenen Kern und berücksichtigen (p), (i) und (4)

$$[a\text{-}\overline{\lim_{i}}\ P\,(r_i')]_o \subset [P\,(x)_a + p]_o = P\,(x). \tag{q}$$

Ist $\{x_n\}$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n} x_n = x$, so gibt es wegen (n) eine Folge $\{r_i'\}$ mit $x_n < r'_{i(n)}$. Wegen (m) gilt dann $P\,(x_n) \subset P\,(r'_{i(n)})$ und aus (q) folgt schließlich

$$[a\text{-}\overline{\lim_{n}}\ P\ (x_n)]_o \subset [a\text{-}\overline{\lim_{i}}\ P\,(r'_{i(n)})]_o \subset P\,(x).$$

Diese Relation gilt auch für $x = 1$, denn wegen $P(x_n) \subset P(1)$ und (c) gilt $a\text{-}\overline{\lim_n} P(x_n) \subset P(1)_a$, $[a\text{-}\overline{\lim_n} P(x_n)]_o \subset P(1)_{ao} = P(1)$. $P(x)$ ist daher für alle x aus $[0, 1]$ i. w. S. oberhalb stetig. Das ergibt zusammen mit der Unterhalbstetigkeit wegen Definition 11 die Stetigkeit i. w. S. von $P(x)$.

§ 5. Monotone Funktionenfolgen.

Satz 26: Der offene Limes einer Folge monoton zunehmender, i. w. S. unterhalb stetiger Funktionen mit offenen Werten ist i. w. S. unterhalb stetig.

Beweis: Sind M_n offene Mengen einer monoton zunehmenden Folge $\{M_n\}$, so gilt $o\text{-}\lim_n M_n = \underset{n}{V} M_n$. Der Satz 26 folgt also unmittelbar aus dem Satz 18.

Satz 26a: Die Grenzmenge und der abgeschlossene Limes einer Folge monoton zunehmender, .i w. S. unterhalb stetiger Funktionen ist i. w. S. unterhalb stetig.

Beweis: Für eine monoton zunehmende Mengenfolge $\{M_n\}$ gilt $\lim_n M_n = \underset{n}{V} M_n$ und $a\text{-}\lim_n M_n = (\underset{n}{V} M_n)_a$. Der Satz 26 a folgt daher unmittelbar aus dem Satz 18 bzw. Satz 18 und 13.

Satz 27: Der abgeschlossene Limes einer Folge monoton abnehmender, i. w. S. oberhalb stetiger Funktionen mit abgeschlossenen Werten ist i. w. S. oberhalb stetig.

Beweis: Sind M_n abgeschlossene Mengen einer monoton abnehmenden Folge $\{M_n\}$, so gilt $a\text{-}\lim_n M_n = \underset{n}{D} M_n$. Der Satz 27 folgt also aus dem Satz 17.

Satz 27a: Die Grenzmenge und der offene Limes einer Folge monoton abnehmender, i. w. S. oberhalb stetiger Funktionen ist i. w. S. oberhalb stetig.

Beweis: Für eine monoton abnehmende Folge $\{M_n\}$ gilt $\lim_n M_n = \underset{n}{D} M_n$ und $o\text{-}\lim_n M_n = (\underset{n}{D} M_n)_o$. Der Satz 27a folgt also aus dem Satz 17 bzw. Satz 17 und 14.

Für alle folgenden Sätze gelten die Voraussetzungen:

1. Der Raum E, aus dem die Argumente der Funktionen sind, ist separabel, metrisch und von der Eigenschaft, daß jede beschränkte Teilmenge kompakt ist.

2. Der Raum R, in dem alle Funktionswerte als Teilmengen enthalten sind, ist metrisch, kompakt (und daher separabel) und in sich dicht.

Satz 28: Ist $H(a)$ eine auf der Menge E unterhalb stetige Funktion mit offenen Funktionswerten, so existiert eine monoton zunehmende Folge von i. w. S. stetigen Funktionen $H_i(a)$ mit offenen Werten, für die $o\text{-}\lim_i H_i(a) = H(a)$.

Beweis: Wir geben eine Zahl $\delta_1 > 0$ und eine monotone Nullfolge $\{\varepsilon_i\}$ von positiven Zahlen vor, für die

$$2\,\varepsilon_i < \varepsilon_{i-1}. \tag{a}$$

Da $H(a)$ im Punkte a unterhalb stetig und R kompakt ist, gibt es nach Satz 7 ein $\delta_a^1 < \delta_1$, für das $\overline{K}[H(a), \varepsilon_1] \subset H(a')$ gilt, sobald a' Element von $U(a, \delta_a^1)$ ist. Da E separabel ist, überdecken schon abzählbar viele der Umgebungen $U(a, \delta_a^1)$, die $U(a_n^1, \delta_n^1)$ heißen sollen, den Raum E. Um deren Mittelpunkte bilden wir abgeschlossene Umgebungen $\overline{U}(a_m^1, 10\,\delta_1)$ mit dem Radius $10\,\delta_1$. Diese sind beschränkt und daher laut Voraussetzung in sich kompakt. Es genügen daher schon endlich viele der $U(a_n^1, \delta_n^1)$ zur Überdeckung von $\overline{U}(a_m^1, 10\,\delta_1)$. Dabei sollen zuerst die offenen Umgebungen genommen werden, die die $\overline{U}(a_{m'}^1, 10\,\delta_1)$ mit $m' < m$ überdecken und Punkte mit $\overline{U}(a_m^1, 10\,\delta_1)$ gemeinsam haben, dann der Reihe nach die folgenden $U(a_n^1, \delta_n^1)$, die nicht in der Vereinigung der bisherigen $U(a_{n'}^1, \delta_{n'}^1)$ enthalten sind und Punkte mit $U(a_m^1, 10\,\delta_1)$ gemeinsam haben. Wir wollen den Satz für a_o aus $U(a_k^1, \delta_k^1)$ beweisen. Der kleinste Wert der δ_n^1, die zu den endlich vielen $U(a_n^1, \delta_n^1)$ gehören, die $\overline{U}(a_m^1, 10\,\delta_1)$ überdecken, sei d_m^1. Nach einem Satz über reelle Funktionen, der unserem Satz 31 entspricht[11], gibt es eine auf E stetige reelle Funktion $d^1(a)$ mit positiven Werten, die auf der abgeschlossenen Menge $\{a_m^1\}$ die Werte d_m^1 annimmt.

Wir definieren: $H_n^1(a) = P_n^1\left(\dfrac{d[a, U(a_n^1, \delta_n^1)]}{d^1(a)}\right)$, wobei die i. w. S. stetige Funktion $P_n^1(x)$ nach dem Satz 25 so gebildet wird, daß $P_n^1(0) = K[H(a_n^1, 2\,\varepsilon_1]_{ao}$ und $P_n^1(x) = R$ für $x \geqq 1$. $H_n^1(a)$ ist i. w. S. stetig gemäß Definition 11, 9 und 10.

---

[11] Ist E kompakt, dann können wir auch ohne Verwendung dieses Satzes für $d^1(a)$ die kleinste sämtlicher endlich vielen $\delta^1{}_n$ setzen.

Der Abstand $d[a_n, U(a_{n'}^1, \delta_{n'}^1)]$ ist nämlich eine stetige reelle Funktion von a, ebenso der Nenner $d^1(a) \neq 0$ und daher auch das ganze Argument von P_n^1.

Entsprechend konstruieren wir die Funktionen $H_n^2(a), H_n^3(a), \ldots, H_n^i(a), \ldots$ Dazu benötigen wir den folgenden *Hilfssatz*: „Es gibt eine solche von a unabhängige[12] Zahl $\delta_i > 0$ einer Nullfolge, daß $U(a, \delta_i)$ in mindestens einem $U(a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1})$ enthalten ist, wenn a aus der in sich kompakten Menge $\overline{U}(a_k^1, 10\,\delta_1)$ ist, die von den Umgebungen $U(a_{n'}^{i-1}\,\delta_{n'}^{i-1})$ lückenlos überdeckt wird". Zum Beweise bilden wir zu jedem Punkt a die obere Grenze $\delta(a)$ der δ, für die $U(a, \delta)$ noch in einem $U(a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1})$ enthalten ist. Da die $U(a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1})$ offen sind und $\overline{U}(a_k^1, 10\,\delta_1)$ lückenlos überdecken, ist $\delta(a) > 0$. δ_i ist die untere Grenze der $\delta(a)$, gebildet über alle a aus $\overline{U}(a_k^1, 10\,\delta_1)$. δ_i ist größer als null. Wäre nämlich $\delta_i = 0$, so gäbe es eine Folge von Umgebungen $U[a_n, \delta(a_n)]$ mit $\lim\limits_n \delta(a_n) = 0$. Da $\overline{U}(a_k^1, 10\,\delta_i)$ kompakt ist, hat die Folge $\{a_n\}$ mindestens einen Häufungspunkt $\bar{a}$. Es gibt daher eine Teilfolge $\{b_n\}$ von $\{a_n\}$ mit $\lim\limits_n b_n = \bar{a}$, für die ebenfalls gilt

$$\lim_n \delta(b_n) = 0. \tag{b}$$

Da $\delta(\bar{a}) > 0$, $U[\bar{a}, \delta(\bar{a})]$ in einem $U(a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1})$ enthalten ist und da für hinreichend große n $d(\bar{a}, b_n) < \dfrac{\delta(\bar{a})}{2}$, ergibt sich im Hinblick auf (31)

$$U\left(b_n, \frac{\delta(\bar{a})}{2}\right) \subset U\left[U\left(\bar{a}, \frac{\delta(\bar{a})}{2}\right), \frac{\delta(\bar{a})}{2}\right] \subset U[\bar{a}, \delta(\bar{a})] \subset U(a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1}).$$

Das heißt $\delta(b_n) > \dfrac{\delta(\bar{a})}{2}$ für hinreichend große n im Widerspruch mit (b).

Da $H(a)$ in a unterhalb stetig ist, gibt es zu ε_i nach dem Satz 7 ein $\delta_a^i < \delta_i$ mit $\delta_a^i \leqq \delta_a^{i-1} \leqq \ldots \leqq \delta_a{}^1 < \delta_1$, für das im Hinblick auf (26) gilt

$$K[H(a), \varepsilon_i] \subset \overline{K}[H(a), \varepsilon_i] \subset H(a'), \text{ sobald } a' \text{ aus } U(a, \delta_a^i) \tag{c}$$

Wie oben wählen wir aus der Überdeckung von E durch die $U(a, \delta_a^i)$ abzählbar viele $U(a_n^i, \delta_n^i)$ aus, wozu alle jene gehören sollen, die

[12] δ_1 ist beliebig vorgegeben und vollkommen unabhängig, die δ_i mit $i > 1$ sind von δ_{i-1} und a_k^1 abhängig.

alle bisherigen a_n^h mit $h < i$ als Mittelpunkte enthalten, die aber wegen des geringeren Radius δ_a^i durch weitere $U(a_n^i, \delta_n^i)$ ergänzt werden müssen. Es gibt wieder endlich viele von den Umgebungen $U(a_n^i, \delta_n^i)$ mit $\delta_n^i < \delta_i$, die die in sich kompakte Menge $\overline{U}(a_m^1, 10\,\delta_1)$ überdecken.

Zu den Mittelpunkten a_n^i gehören auch die $a_{n'}^{i-1}$, a_o soll in $U(a_k^i, \delta_k^i)$ liegen und d_m^i die kleinste der Zahlen δ_n^i, die von den endlich vielen $U(a_n^i, \delta_n^i)$ gehören, die $\overline{U}(a_m^1, 10\,\delta_1)$ überdecken. $d^i(a)$ sei wieder eine reelle Funktiou, für die $d^i(a_m^i) = d_m^i$ und $0 < d^i(a) \leqq d^{i-1}(a)$[13], was wegen $\delta_a^i \leqq \delta_a^{i-1}$ möglich ist.

Wir definieren:

$$H_n^i(a) = P_n^i\left(\frac{d\,[a, U(a_n, \delta_n^i)]}{d_i(a)}\right), \tag{d}$$

wobei die auf $[0, 1]$ i. w. S. stetigen Funktionen $P_n^i(x)$ nach dem Satz 25 so gebildet sind, daß gilt

$$P_n^i(0) = K\,[H(a_n^i), 2\,\varepsilon_i]_{ao}, \qquad P_n^i(x) = R, \text{ für } x \geqq 1 \tag{e}$$

und jede Funktion $P_n^i(x)$ mit derselben Überdeckungsfolge wie bei $P_n{}^1(x)$ und demselben Prinzip der Zuordnung zu den Punkten aus $[0, 1]$ konstruiert wird. Wie bei $H_n{}^1(a)$ zeigt man, daß $H_n^i(a)$ i. w. S. stetig ist.

Nach dem obigen Hilfssatz gibt es zu jedem n ein n', für das $U(a_n^i, \delta_i) \subset U(a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1})$ und wegen $\delta_n^i < \delta_i$ $U(a_n^i, \delta_n^i) \subset U(a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1})$, daher gilt wegen (c) $K\,[H(a_{n'}^{i-1}), \varepsilon_{i-1}] \subset H(a_n^i)$.

Wir bilden auf beiden Seiten den ε-Kern mit ε_{i-1} und berücksichtigen (33) $K\,[H(a_{n'}^{i-1}), 2\,\varepsilon_{i-1}] \subset K\{K\,[H(a_{n'}^{i-1}), \varepsilon_{i-1}], \varepsilon_{i-1}\} \subset K\,[H(a_n^i), \varepsilon_{i-1}]$. Nun lassen wir das mittlere Glied weg, bilden die abgeschlossene Hülle, dann den offenen Kern und erhalten im Hinblick auf (a), (29) und (e)

$$P_{n'}^{i-1}(0) = K\,[H(a_{n'}^{i-1}), 2\,\varepsilon_{i-1}]_{ao} \subset K\,[H(a_n^i), 2\,\varepsilon_i]_{ao} = P_n^i(o) \tag{f}$$

Da wir für die Konstruktion von $P_n^i(x)$, $P_n^{i-1}(x)$, ..., $P_n^1(x)$ nach dem Satz 25 dieselben Überdeckungsfolgen und das gleiche Prinzip der Zuordnung der Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ verwenden, gilt wegen (f) für $x' < x$ und für die n', die der Bedingung

$$U(a_n^i, \delta_n^i) \subset U\,a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1}) \tag{g}$$

genügen, $P_{n'}^{i-1}(x') \subset P_n^i(x)$. Ferner ist

$$\frac{d\,[a, U(a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1})]}{d^{i-1}(a)} \leqq \frac{d\,[a, U(a_n^i, \delta_n^i)]}{d^i(a)},$$

[13] Vgl. Fußnote 11.

da $d^{i-1}(a) \geqq d^i(a)$ und wegen (g) $d\,[a, U(a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1})] \leqq d\,[a, U(a_n^i, \delta_n^i)_i$. Daraus folgt

$$P_{n'}^{i-1}\left(\frac{d\,[a, U\,(a_{n'}^{i-1}, \delta_{n'}^{i-1})]}{d^{i-1}(a)}\right) \subset P_n^i\left(\frac{d\,[a, U\,(a_n^i, \delta_n^i)]}{d^i(a)}\right),$$

oder wegen (d)

$$H_{n'}^{i-1}(a) \subset H_n^i(a), \tag{h}$$

für alle Kombinationen (n', n), die die Bedingung (g) erfüllen.

Wir definieren nun die gesuchte Funktionenfolge:

$$H_i(a) = \underset{n}{D}\, H_n^i(a) \tag{i}$$

Es ergibt sich dieselbe Durchschnittsmenge $\underset{n}{D}\, H_n^i(a_o)$, wenn wir a_o gegebenenfalls nicht auf $U(a_k^1, \delta_k^1)$, sondern auf eine andere Umgebung $U(a_l^1, \delta_l^1)$, in der a_o enthalten ist, beziehen: Wegen $d(a_o, a_k) < \delta_k^1 < \delta_1$ und $d(a_o, a_l^1) < \delta_l^1 < \delta_1$ folgt im Hinblick auf (30) $d(a_k^1, a_l^1) < 2\,\delta_1$ und

$$U(a_l^1, 8\,\delta_1) \subset U(a_k^1, 10\,\delta_1). \tag{j}$$

Die in $U(a_l^1, 8\,\delta_1)$ liegenden $U(a_n^1, \delta_n^1)$ der Überdeckung von $\overline{U}(a_k^1, 10\,\delta_1)$ und $\overline{U}(a_l^1, 10\,\delta_1)$ stimmen überein, da wir anfangs bei den $U(a_m^1, 10\,\delta_1)$ die Überdeckungen der vorhergehenden $\overline{U}(a_{m'}^1, 10\,\delta_1)$ verwendeten und nur $U(a_n^1, \delta_n^1)$ dazugeben, die nicht in der Vereinigung der bisherigen $U(a_{n'}^1, \delta_{n'}^1)$ [also hier erst recht nicht in $U(a_l^1, 8\,\delta_1)$] enthalten sind. Die $H_n^i(a_o)$, die den in $\overline{U}(a_l^1, 8\,\delta_1)$ liegenden $U(a_n^i, \delta_n^i)$ zugeordnet sind, stimmen also überein. Da der Durchmesser aller $U(a_n^i, \delta_n^i)$ kleiner als $2\,\delta_1$ ist, folgt im Hinblick auf (30) und (j) $d\,[a_o, U(a_n^i, \delta_n^i)] > 6\,\delta_1$, wenn $U(a_n^i, \delta_n^i)$ nicht in $\overline{U}(a_l^1, 8\,\delta_1)$ liegt. Die zu diesen n gehörenden $H_n^i(a_o)$ sind gemäß (d) und (e) gleich R und beeinflussen also den Durchschnitt $\underset{n}{D}\, H_n^i(a_o) = H_i(a_o)$ auch nicht. Unter Berücksichtigung der Sätze 16 und 17 ist also $H_i(a)$ auf $U(a_k^1, \delta_k^1)$ i. w. S. stetig, da mit Ausnahme der $H_n^i(a) = R$ die Anzahl der $H_n^i(a)$ eine eindeutige, endliche Zahl ist. $H_i(a)$ ist auf ganz E i. w. S. stetig, weil a_o beliebig gewählt war.

Aus (h) und (i) folgt

$$H_{i-1}(a) \subset H_i(a), \tag{k}$$

denn zu jedem n gibt es wegen $\delta_n^i < \delta_i$ ein n', das die Bedingung (g) erfüllt wegen des zu Beginn dieses Beweises angeführten Hilfssatzes und umgekehrt gibt es zu jedem n' ein n (nämlich den Index desjenigen a_n^i, das mit $a_{n'}^{i-1}$ identisch ist), so daß das Paar (n', n) ebenfalls die Bedingung (g) erfüllt, da $\delta_n^i \leqq \delta_{n'}^{i-1}$ ist für denselben Punkt a.

Es bleibt noch zu beweisen

$$o\text{-}\lim_i H_i(a_o) = H(a_o). \tag{l}$$

Wir zeigen zuerst

$$o\text{-}\lim_i H_i(a_o) \supset H(a_o) \tag{m}$$

Wegen (c) gilt $H(a_n^i) \supset K[H(a_{k_j^j}), \varepsilon_j]$ für alle a_n^i aus der Umgebung $U(a_{k_j^j}, \delta_{k_j^j})$, in der a_o enthalten ist. Wir wählen i so groß, daß

$$\delta_i + d^i(a_o) < d[a_o, R - U(a_{k_j^j}, \delta_{k_j^j}). \tag{n}$$

dann ist, wenn a_n^i nicht aus $U(a_{k_j^j}, \delta_{k_j^j})$ ist, wegen (30) und weil $\delta_n^i < \delta_i$ ist, $d[a_o, U(a_n^i, \delta_n^i)] > d^i(a_o)$, also $\dfrac{d[a_o, U(a_n^i, \delta_n^i)]}{d^i(a_o)} > 1$.

Daher gilt wegen (e)

$$H_n^i(a_o) = P_n^i\left(\frac{d[a_o, U(a_n^i, \delta_n^i)}{d^i(a_o)}\right) = R, \tag{o}$$

wenn a_n^i nicht aus $U(a_{k_j^j}, \delta_{k_j^j})$ ist. Hingegen gilt für alle a_n^i aus $U(a_{k_j^j}, \delta_{k_j^j})$ $H(a_n^i) \supset K[H(a_{k_j^j}, \delta_{k_j^j}), \varepsilon_j]$, woraus durch Bildung des ε-Kernes mit $2\varepsilon_i$ im Hinblick auf (d) und (e) unter Berücksichtigung von (33) folgt

$$P_n^i\left(\frac{d[a_o, U(a_n^i, \delta_n^i)]}{d^i(a_o)}\right) \supset$$

$$\supset K[H(a_n^i), 2\varepsilon_i]_{ao} \supset K[H(a_n^i), 2\varepsilon_i] \supset K\{K[H(a_{k_j^j}, \delta_{k_j^j}), \varepsilon_j], 2\varepsilon_i\} \supset$$

$$\supset K[H(a_{k_j^j}), \varepsilon_j + 2\varepsilon_i].$$

Für $i > j$ folgt, da wegen (a) $2\varepsilon_i < \varepsilon_{i-1} \leqq \varepsilon_j$, die Ungleichung $\varepsilon_j + 2\varepsilon_i \leqq 2\varepsilon_j$ und aus der letzten Mengenungleichung ergibt sich, indem man die drei mittleren Glieder wegläßt, im Hinblick auf (d), (29) und (26)

$$H_n^i(a_o) = P_n^i\left(\frac{d[a_o, U(a_n^i, \delta_n^i)]}{d^i(a_o)}\right) \supset K[H(a_{k_j^j}), 2\varepsilon_j] \tag{p}$$

für alle a_n^i aus $U(a_{k_j^j}, \delta_{k_j^j})$ und $i > j$. Aus (o), (p) und (i) folgt schließlich für alle i, welche (n) erfüllen,

$$H_i(a_o) = \underset{n}{D} H_n(a_o^i) \supset K[H(a_{k_j^j}), 2\varepsilon_j] \tag{q}$$

Da $H(a)$ in a_o unterhalb stetig ist, gibt es nach dem Satz 7 zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, für das

$$H(a_{k_j^j}) \supset K[H(a_o), \varepsilon/2] \text{ für alle } a_{k_j^j} \text{ aus } U(a_o, \delta). \tag{r}$$

Es gibt in jedem $U(a_o, \delta)$ Punkte $a_{k_j^j}$, da für jedes j a_o in einem $U(a_{k_j^j}, \delta_{k_j^j})$ liegt und wegen $\delta_{k_j^j} < \delta_j \lim_j \delta_{k_j^j} = 0$ ist. j_o sei das kleinste j, für das erstens $a_{k_j^j}$ aus $U(a_o, \delta)$ ist und zweitens $2\,\varepsilon_j < \varepsilon/2$. Dazu gibt es ein kleinstes i, das die Bedingung (n) erfüllt. Es heiße i_o. Aus (q) folgt nun wegen (29) und (26) $H_i(a_o) \supset K[H(a_{k_j^j}), \varepsilon/2]$, wenn $i \geqq i_o$ ist.

Jetzt setzen wir (r) ein und berücksichtigen (33):

$H_i(a_o) \supset K\{K[H(a_o), \varepsilon/2], \varepsilon/2\} \supset K[H(a_o), \varepsilon]$ für $i > i_o$. Daraus folgt (m) nach Satz 3. Nun bleibt noch zu zeigen:

$$o\text{-}\lim_i H_i(a_o) \subset H(a_o). \tag{s}$$

Laut (i) gilt $H_i(a_o) = D_n H_n^i(a_o) \subset H_{k_i^i}(a_o)$. Da a_o in $U(a_{k_i^i}, \delta_{k_i^i})$ liegt, ist gemäß (d) und (e) $H_{k_i^i}(a_o) = K[H(a_{k_i^i}), 2\,\varepsilon_i]_{ao}$. Also gilt $H_i(a_o) \subset K[H(a_{k_i^i}), 2\,\varepsilon_i]_{ao}$. Ferner gilt wegen (c), da a_o in $U(a_{k_i^i}, \delta_{k_i^i})$ liegt, $K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon_i] \subset H(a_o)$. Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt im Hinblick auf (26) und (29) für alle i

$$H_i(a_o) \subset \overline{K}[H(a_{k_i^i}), 2\,\varepsilon_i]_o \subset K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon_i]_o \subset K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon_i] \subset H(a_o). \tag{t}$$

Daraus folgt (s) und zusammen mit (m) die Relation (l).

Zusatz 28: Es gibt zu jedem i ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\overline{U}[H_i(a), \varepsilon] \subset H(a) \text{ bzw. } H_i(a) \subset K[H(a), \varepsilon].$$

Beweis: Wir wählen ε' so, daß $\varepsilon_i < \varepsilon' < 2\,\varepsilon_i$ und ε so, daß $0 < \varepsilon < \varepsilon' - \varepsilon_i$ ist. Dann folgt aus (t) wegen (27) und (29)

$$H_i(a_o) \subset K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon'] \subset K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon_i] \subset H(a_o)$$

und wegen (28) und (34) bzw. wegen (33)

$\overline{U}[H_i(a_o), \varepsilon] \subset \overline{U}\{K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon'], \varepsilon\} \subset U\{K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon'], \varepsilon' - \varepsilon_i\} \subset$

$\subset K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon_i] \subset H(a_o)$ bzw. $H_i(a_o) \subset K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon'] \subset$

$\subset K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon_i + \varepsilon] \subset K\{K[H(a_{k_i^i}), \varepsilon_i], \varepsilon\} \subset K[H(a_o), \varepsilon]$.

Satz 29: Ist $G(a)$ eine auf der Menge E oberhalb stetige Funktion mit abgeschlossenen Funktionswerten, so existiert eine monoton abnehmende Folge von i. w. S. stetiger Funktionen $G_i(a)$ mit abgeschlossenen Werten, für die $a\text{-}\lim_i G_i(a) = G(a)$.

Beweis: $R - G$ ist offen und unterhalb stetig nach Satz 9. Es gibt nach dem Satz 28 eine monoton zunehmende Folge $\{H_i\}$ i. w. S. stetiger

Funktionen mit $o\text{-}\lim\limits_{i} H_i = R—G$. Wir bilden auf beiden Seiten die Komplemente: $R — o\text{-}\lim\limits_{i} H_i = G$ und erhalten wegen (17) $a\text{-}\lim\limits_{i} (R — H_i) = G$; $R—H_i = G_i$ sind die gesuchten Funktionen der Folge. Sie haben abgeschlossene Werte, sind nach den Sätzen 9 und 10 i. w. S. stetig und bilden eine monoton abnehmende Folge. Ferner bilden wir das Komplement der beiden Relationen des Zusatzes 28 und erhalten im Hinblick auf (23) den

Zusatz 29: Es gibt zu jedem i ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$K(G_i, \varepsilon) \supset G \text{ bzw. } G_i \supset \overline{U}(G, \varepsilon).$$

§ 6. Einschiebungssatz, Erweiterungssätze.

Satz 30: Ist $G(a)$ eine auf E oberhalb stetige Funktion mit abgeschlossenen Werten, $H(a)$ eine auf E unterhalb stetige Funktion mit offenen Werten, die für jeden Punkt a aus E Obermenge von $G(a)$ und Teilmenge von R sind, so gibt es eine i. w. S. stetige Funktion $F(a)$, deren Werte für jeden Punkt a Obermengen von $G(a)$ und Teilmengen von $H(a)$ sind.

Beweis: Nach dem Satz 28 gibt es eine Folge i. w. S. stetiger Funktionen $H_n(a)$ mit offenen Werten, für die $o\text{-}\lim\limits_{n} H_n(a) = H(a)$ und $H_n(a) \subset H_{n+1}(a) \subset H(a)$ gilt; nach dem Satz 29 gibt es eine Folge i. w. S. stetiger Funktionen $G_n(a)$ mit abgeschlossenen Werten, für die $a\text{-}\lim G_n(a) = G(a)$ und $G_n(a) \supset G_{n+1}(a) \supset G(a)$. Wir bilden daraus eine Funktionenfolge mit den offenen Mengen

$$A_n = \bigvee_{i=1}^{n} G_{io} H_i \tag{a}$$

und mit den abgeschlossenen Mengen

$$B_n = \bigvee_{i=1}^{n-1} G_i H_{ia} + G_n \tag{b}$$

Es gilt $A_n \subset B_n$, denn wegen $G_{no} H_n \subset G_{no}$ folgt

$$A_n = \bigvee_{i=1}^{n-1} G_{io} H_i + G_{no} H_n \subset \bigvee_{i=1}^{n-1} G_{io} H_i + G_{no} \subset \bigvee_{i=1}^{n-1} G_i H_{ia} + G_n = B_n.$$

Aus (a) folgt unmittelbar

$$A_n \subset A_{n+1}. \tag{c}$$

Ferner gilt

$$B_n \supset B_{n+1}. \tag{d}$$

Wegen $G_n \supset G_{n+1}$ und $G_n \supset G_n H_{na}$ folgt nämlich

$$B_n = \overset{n-1}{\underset{i=1}{V}} G_i H_{ia} + G_n \supset \overset{n-1}{\underset{i=1}{V}} G_i H_{ia} + G_n H_{na} + G_{n+1} = B_{n+1}.$$

Von A_n und B_n leiten wir weitere Mengenfunktionen ab:

$A_{na} = [\overset{n}{\underset{i=1}{V}} G_{io} H_i]_a$. Gemäß (7) folgt $A_{na} = \overset{n}{\underset{i=1}{V}} [G_{io} H_i]_a$, nach (13) $A_{na} \supset \overset{n}{\underset{i=1}{V}} [G_{ioa} H_{ia}]_o$ und schließlich nach (8) $A_{na} \supset \overset{n}{\underset{i=1}{V}} [G_{ioao} H_{iao}]$. Davon bilden wir den offenen Kern: $A_{nao} \supset [\overset{n}{\underset{i=1}{V}} G_{ioao} H_{iao}]_o$. Im Hinblick auf (12) gilt $A_{nao} \supset \overset{n}{\underset{i=1}{V}} [G_{ioao} H_{iao}]_o$, nach (8) folgt nun $A_{nao} \supset \overset{n}{\underset{i=1}{V}} G_{ioaoo} H_{iaoo}$. Wegen (4) gilt $G_{ioaoo} = G_{ioao} = G_{io}$, da $G_i = G_{ia}$ abgeschlossen ist. Also folgt endlich

$$A_{nao} \supset \overset{n}{\underset{i=1}{V}} G_{io} H_{iao}. \tag{e}$$

Ferner ergibt sich

$$B_{no} \subset [\overset{n}{\underset{i=1}{V}} G_{io} H_{iao} + G_{no}]_a, \tag{f}$$

wie folgt: Wir bilden den offenen Kern von (b) $B_{no} = [\overset{n-1}{\underset{i=1}{V}} G_i H_{ia} + G_n]_o$. Gemäß (14) gilt $B_{no} \subset [\overset{n-1}{\underset{i=1}{V}} (G_i H_{ia})_o + G_{no}]_a$ und wegen (8) folgt schließlich (f).

Da R—H und G abgeschlossene, kompakte Mengen sind und wegen $G \subset H$ $(R$—$H).G$ leer ist, ist der Abstand $\varepsilon_o = d\,(R$—$H, G)$ größer als Null. Für jede positive Zahl $\varepsilon < \frac{\varepsilon_o}{2}$ gilt also $\overline{U}(R$—$H, \varepsilon)\,.\,\overline{U}(G, \varepsilon) = 0$, oder im Hinblick auf (23)

$$K\,(H, \varepsilon) = R\text{—}\overline{U}\,(R\text{—}H, \varepsilon) \supset \overline{U}\,(G, \varepsilon). \tag{g}$$

Diese Ungleichung gilt wegen der Fußnote 8 auch dann, wenn R—H, oder G leer ist. Nach Zusatz 28 gibt es ein solches i_1, daß $H_i \supset K\,(H, \varepsilon)$ für alle $i > i_1$ und nach Zusatz 29 ein solches i_2, daß $G_i \subset \overline{U}\,(G, \varepsilon)$ für alle $i > i_2$. Es sei i_o die größere der beiden Zahlen i_1 und i_2, dann gilt unter Berücksichtigung von (g) $H_i \supset K\,(H, \varepsilon) \supset \overline{U}\,(G, \varepsilon) \supset G_i$ für $i > i_o$. Für alle $i > i_o$ gilt also $G_{io} \subset H_{iao}$, $G_{io} H_{iao} = G_{io} \supset G_{i+1,o} \supset G_{i+2,o}$

und daher auch $G_{io} H_{iao} \supset G_{i+1,o} H_{i+1,ao} \supset G_{i+2,o} H_{i+2,ao} \supset \ldots$ Formel (e) lautet also für jedes $n > i_o$

$$A_{nao} \supset \overset{n}{\underset{i=1}{V}} G_{io} H_{iao} = \overset{n+1}{\underset{i=1}{V}} G_{io} H_{iao} = \overset{n+2}{\underset{i=1}{V}} G_{io} H_{iao} = \ldots = C. \tag{h}$$

Formel (f) lautet für jedes $n > i_o$

$$B_{no} \subset [\overset{n-1}{\underset{i=1}{V}} G_{io} H_{iao} + G_{no}]_a = C_a, \tag{i}$$

da $G_{no} = G_{no} H_{nao}$ für jedes $n > i_o$. Wir bilden die abgeschlossene Hülle der Ungleichung (h) $A_{naoa} \supset C_a$. Wegen (3) gilt $A_{naoa} = A_{na}$, da A_n offen ist. Im Hinblick auf (i) folgt $A_{na} \supset B_{no}$ und daraus $A_{nao} \supset B_{no}$. Ferner gilt aber auch $A_{nao} \subset B_{no}$, da $A_n \subset B_n$, woraus folgt $A_{na} \subset B_{na} = B_n$, weil B_n wegen (b) abgeschlossen ist, und schließlich $A_{nao} \subset B_{no}$. Also gilt für alle $n > i_o$ $A_{nao} = B_{no}$. Es folgt daher, sobald $n > i_o$, wegen (c) und (d)

$$o\text{-}\lim_i A_{iao} = A_{nao} = B_{no} = o\text{-}\lim_i B_{io} = F'.$$

F' ist als offener Limes einer zunehmenden Folge unterhalb stetiger Funktionen A_{nao} offen und wegen des Satzes 26 i. w. S. unterhalb stetig, denn die Unterhalbstetigkeit von A_{nao} folgt aus (a) und den Sätzen 12, 13, 16 und 18. Entsprechend folgt wegen (b) und der Sätze 11, 17, 15 und 14, daß B_{no} i. w. S. oberhalb stetig ist. Daher ist F' als offener Limes einer abnehmenden Folge i. w. S. oberhalb stetiger Funktionen B_{no} wegen des Satzes 27a i. w. S. oberhalb stetig. F' ist also i. w. S. stetig.

Wir bilden die abgeschlossene Hülle von (h): $A_{naoa} \supset C_a$. Da A_n offen ist, gilt nach (3) $A_{naoa} = A_{noaoa} = A_{na}$. Ferner bilden wir die abgeschlossene Hülle von (i): $B_{noa} \subset C_{aa} = C_a$. Daraus folgt nun $A_{na} \supset C_a \supset B_{noa}$. Ferner gilt $A_{na} \subset B_{noa}$ wegen $A_n = A_{no} \subset B_{no}$. Es kann also nur gelten $A_{na} = C_a = B_{noa}$. Daraus ergibt sich schließlich, wenn $n > i_o$

$$F' = A_{nao} = C_{ao}. \tag{k}$$

Gemäß (h) gilt für alle $n > i_o$ $C \subset H_{nao}$, da $\{H_{nao}\}$ mit n monoton zunehmend ist. Nach dem Zusatz 28 gibt es ein $\varepsilon_n > 0$, so daß $H_n \subset K(H, \varepsilon_n)$, daher folgt wegen (26) und (29) $H_{na} \subset K(H, \varepsilon_n/2)$ und schließlich $H_{nao} \subset K(H, \varepsilon_n/2)$. Es ist also $C \subset K(H, \varepsilon_n/2)$ und wegen (26) und (29)

$$C_a \subset K(H, \varepsilon_n/4). \tag{l}$$

Nun folgt wegen (k)

$$F' = C_{ao} \subset K(H, \varepsilon_n/4) \subset H. \tag{m}$$

Es bleibt noch zu zeigen $F' \supset G$: Da für $i > i_o$ $G_{io} \subset H_{iao}$, folgt aus (h) für alle $n > i_o$

$$C \supset G_{no} \tag{n}$$

Gemäß Zusatz 29 gibt es ein $\varepsilon_n' > 0$, so daß $G_n \supset \overline{U}(G, \varepsilon_n')$ und daher wegen (24) und (28) $G_{no} \supset \overline{U}(G, \varepsilon_n'/2)$ und wegen (n) $C \supset \overline{U}(G, \varepsilon_n'/2)$, oder

$$C_a \supset \overline{U}(G, \varepsilon_n'/2) \tag{o}$$

Daraus folgt schließlich wegen (24) und (28)

$$F' = C_{ao} \supset \overline{U}(G, \varepsilon_n'/4) \supset G \tag{p}$$

Das ergibt zusammen mit (m) $G \subset F' \subset H$ und damit haben wir die gesuchte i. w. S. stetige Funktion F' mit offenen Werten gefunden.

Die gesuchte eingeschobene i. w. S. stetige Funktion F'' mit abgeschlossenen Werten ist ${F'}_a$: Wegen der Sätze 11 und 13 ist F'' i. w. S. stetig. Ferner gilt $F'' = {F'}_a = C_{aoa} = C_a$ wegen (3), da C offen ist. Aus (l) und (o) folgt schließlich $G \subset F'' \subset H$.

Zusatz: ${F''}_o = F'$.

Beweis: ${F''}_o = {F'}_{ao} = C_{aoao} = C_{ao} = F'$.

Satz 31: Eine auf der abgeschlossenen Menge A definierte, stetige Funktion $F(a)$ mit offenen (bzw. abgeschlossenen) Werten läßt sich zu einer auf dem ganzen Raum E i. w. S. stetigen Funktion erweitern.

Beweis: Wir konstruieren zwei Funktionen: $G(a)$ und $H(a)$. Für alle a aus A sei $G(a) = F(a)_a$, für alle a aus $E—A$ $G(a) = 0$ (leer). $G(a)$ ist auf E oberhalb stetig und hat abgeschlossene Werte. Auf A_o ist nämlich $G(a) = F(a)_a$ wegen des Satzes 11 oberhalb stetig, ebenso $G(a) = 0$ auf der offenen Menge $E—A$ und für einen Punkt a_o aus A. $(E—A)_a$ und eine Folge $\{a_n\}$ mit $\lim_n a_n = a_o$ gilt

$$a\text{-}\overline{\lim_n} G(a_n) = 0 \subset F(a_o)_a,$$

wenn fast alle a_n in $E—A$ liegen, $a\text{-}\lim_n G(a_n) \subset F(a_o)_a$, wenn unendlich viele a_n in A liegen, da $F(a)_a$ auf A oberhalb stetig ist. Also ist $G(a)$ auch auf A. $(E—A)_a$ oberhalb stetig. Ähnlich zeigt man, daß die folgende Funktion unterhalb stetig ist: $H(a) = F(a) = F(a)_o$ für alle a aus A, $H(a) = R$ für alle a aus $E—A$. Wir bilden gemäß Satz 30 die Funktion $F'(a)$ mit offenen Werten (bzw. $F''(a)$ mit abgeschlossenen Werten). $F'(a)$ ist auf $E—A$ i. w. S. stetig, da dort alle Voraussetzungen

des Satzes 30 erfüllt sind. Auf A ist die Bedingung $G(a) \subset H(a)$ nicht erfüllt. Da müssen wir daher die Konstruktion von $F'(a)$ genauer verfolgen. Für alle a aus A gilt

$$H_n(a) \subset H_{n+1}(a) \subset H(a) = F(a)_o \subset F(a)_a = G(a) \subset G_{n+1}(a) \subset G_n(a) \quad \text{(a)}$$

Aus der Formel (a) bzw. (b) des Beweises von Satz 30 folgt unter Berücksichtigung von (a)

$$A_n = \overset{n}{\underset{i=1}{V}} G_{io} H_i = \overset{n}{\underset{i=1}{V}} H_i = H_n \qquad \text{(b)}$$

bzw.

$$B_n = \overset{n=1}{\underset{i=1}{V}} G_i H_{ia} + G_n = H_{n-1} + G_n = G_n. \qquad \text{(c)}$$

Wir müssen nun zeigen, daß $F' = o\text{-}\lim\limits_{n} A_{nao} = o\text{-}\lim\limits_{n} B_{no}$ gleich F ist. Da wegen (b) und (c) $H_n \subset H_{nao} = A_{nao}$ und $B_{no} = G_{no} \subset G_n$ ist, folgt $o\text{-}\lim\limits_{n} H_n \subset o\text{-}\lim\limits_{n} A_{nao} = F' = o\text{-}\lim\limits_{n} B_{no} \subset o\text{-}\lim\limits_{n} G_n$. Da $o\text{-}\lim\limits_{n} H_n = H$ und im Hinblick auf (1) und (2) $o\text{-}\lim\limits_{n} G_n \subset a\text{-}\lim\limits_{n} G_n = G$, gilt für alle a aus A $F(a) = H(a) \subset F'(a) \subset G(a) = F(a)_a$. Wir bilden den offenen Kern und berücksichtigen, daß laut Voraussetzung und Definition 7 und 8 $F(a)_{ao} = F(a)$: $F(a) = H(a) \subset F'(a) \subset G(a)_o = F(a)_{ao} = F(a)$. Also ist $F(a) = F'(a)$ die gesuchte Funktion, die auf A mit $F(a)$ identisch und auf ganz E i. w. S. stetig ist.

Satz 32: Ist $F(a)$ auf E definiert und auf der abgeschlossenen Menge $A \subset E$ stetig, gilt ferner für alle a aus E $G(F, a)_{oa} = G(F, a)$, so gibt es eine im ganzen Raume E i. w. S. stetige Funktion $F'(a) \supset F(a)$, die auf A mit $F(a)$ übereinstimmt.

Beweis: Wir definieren $G(a) = G(F, a)$ für alle a aus E, $H(a) = F(a)_o$ für a aus A, $H(a) = R$ für a aus $E—A$. $G(a)$ ist nach dem Satz 24a oberhalb, $H(a)$ unterhalb stetig. Die nach dem Einschiebungssatz 30 gebildete Funktion $F'(a)$ ist die gesuchte Funktion, wenn $F(a)$ offene Werte hat; $F''(a)$, wenn $F(a)$ abgeschlossene Werte hat. Denn für $E—A$ sind alle Voraussetzungen des Satzes 30 erfüllt. Es gilt dort $H(a) \supset F'(a) \supset G(a)$ und wegen (36) $F'(a) \supset G(a) = G(F, a) \supset F(a)$. $F'(a)$ bzw. $F''(a)$ ist auf $E—A$ i. w. S. stetig. Auf A hingegen ist $F'(a) = F(a)$ bzw. $F''(a) = F(a)$, wenn $F(a)$ abgeschlossen ist. Das folgt wie beim Beweis des Satzes 31.

Mit Hilfe der Komplemente beweist man den

Satz 33: Ist $F(a)$ auf E definiert und auf der abgeschlossenen Menge $A \subset E$ stetig, gilt ferner für alle a aus E $H(F, a)_{ao} = H(F, a)$, so gibt es eine im ganzen Raum E i. w. S. stetige Funktion $F'(a) \subset F(a)$, die auf A mit $F(a)$ übereinstimmt.

Satz 34: Jede oberhalb stetige, auf $A \subset E$ stetige Funktion $F(a)$ mit abgeschlossenen Werten, für die $G(F, a)_{oa} = G(F, a)$, ist abgeschlossener Limes einer abnehmenden Folge i. w. S. stetiger Funktionen $F_i(a)$, die auf A mit $F(a)$ übereinstimmen.

Beweis: Nach dem Satz 32 gibt es eine stetige Funktion $F''(a)$ mit abgeschlossenen Werten, für die gilt

$$F''(a) \supset F(a). \tag{a}$$

Gemäß Satz 29 gibt es eine abnehmende Folge $G_i(a)$ mit abgeschlossenen Werten und

$$a\text{-}\lim_i G_i(a) = F(a). \tag{b}$$

Die gesuchte Folge ist

$$F_i(a) = [G_i(a)_o . F''(a)_o]_a. \tag{c}$$

$F_i(a)$ ist nach den Sätzen 12, 14, 16, 17, 11 und 13 für jedes i i. w. S. stetig. Wegen (15), (20), (a), (b), (c) und $G_i(a)_o \subset G_i(a)$ folgt

$$a\text{-}\lim_i F_i(a) = a\text{-}\lim_i [G_i(a)_o . F''(a)]_a \subset$$
$$\subset a\text{-}\lim_i G_i(a)_o \; . \; a\text{-}\lim_i F''(a)_o \subset F(a) \; . \; F''(a) = F(a). \tag{d}$$

Anderseits ist wegen $G_i(a)_o \supset F(a)_0$ und (a) $G_i(a)_o \; . \; F''(a)_o \supset F(a)_0$, daher wegen (c) und der 2. Bedingung der Definition 7

$$F_i(a) \supset F(a)_{oa} = F(a)$$

und schließlich

$$a\text{-}\lim_i F_i(a) \supset F(a).$$

Das ergibt zusammen mit (d) $a\text{-}\lim_i F_i(a) = F(a)$. Da auf A $F''(a) = F(a)$ und weil $G_i(a)_o \supset F(a)_o$, gilt $F_i(a) = [G_i(a)_o . F''(a)_o]_a = = F(a)_{oa} = F(a)$ für alle Punkte aus A.

Ähnlich beweist man den

Satz 35: Jede unterhalb stetige, auf $A \subset E$ stetige Funktion $F(a)$ mit offenen Werten, für die $H(F, a)_{ao} = H(F, a)$, ist offener Limes einer zunehmenden Folge i. w. S. stetiger Funktionen $F_i(a)$, die auf A mit $F(a)$ übereinstimmen.

§ 7. Schlußbemerkung.

Als Sonderfall betrachten wir nun Funktionswerte, die Teilmengen der Zahlenlinie, einschließlich des uneigentlichen Punktes, sind. Als Abstand zweier Punkte p und q dieses Raumes R, die den reellen Zahlen r und s zugeordnet sind, definieren wir den spitzen Winkel zwischen den beiden Strahlen, die von einem Punkt außerhalb der Zahlenlinie durch die beiden Punkte p und q gehen. Diese Definition genügt den Abstandsaxiomen und der so metrisierte Raum R ist kompakt. Ferner ist er in sich dicht. Als Funktionswerte sollen nur die Intervalle mit der linken Begrenzung $-\infty$ und einer beliebigen rechten Begrenzung in Betracht kommen. Jeder solchen Menge ordnen wir die reelle Zahl zu, die durch den rechten Begrenzungspunkt dargestellt wird, wobei es gleichgültig ist, ob das Intervall rechts offen oder abgeschlossen ist.

Bei dieser Zuordnung entspricht der Teilmenge die kleinere, der Obermenge die größere zugeordnete Zahl; dem Durchschnitt das Minimum bzw. die untere Grenze, der Vereinigung das Maximum bzw. die obere Grenze der zugeordneten Zahlen. Dem unteren bzw. oberen offenen und abgeschlossenen Limes und den Grenzmengen entspricht der limes inferior bzw. superior der zugeordneten Zahlenfolge. Der Stetigkeit bzw. Halbstetigkeit im engeren, im weiteren Sinne und nach *Kuratowski* entspricht die Stetigkeit bzw. Halbstetigkeit der zugeordneten reellen Funktionen. Aus den Sätzen 15 bis 35 folgen daher die entsprechenden bekannten Sätze der Theorie der reellen Funktionen unmittelbar.

Der multiplikative Aufbau beliebiger unendlicher Ordnungszahlen.

Von

Alexander Aigner, Graz.

(Eingelangt am 12. März 1951.)

In Weiterführung meiner Arbeit „Der multiplikative Aufbau der Polynome in der unendlichen Ordnungszahl ω" (Monatshefte f. Math. 55 (1951), S. 157), auf die hiemit verwiesen sei, bringe ich nun die Verallgemeinerung auf beliebige Bereiche von unendlichen Ordnungszahlen. Desgleichen verweise ich bezüglich Bezeichnungen und Zwischenrechnungen auf das Buch von *G. Hessenberg*, „Grundbegriffe der Mengenlehre" (1906).

Um nicht auf die paradoxe Menge aller Ordnungszahlen zu kommen, nehmen wir einen zwar beliebig weiten, aber doch begrenzten, und zwar einen bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossenen Bereich von Ordnungszahlen an. Einen solchen bilden alle einer Zahl vom Typus $\omega^{\omega^{\xi}}$, d. i. einer sogenannten δ-Zahl vorausgehenden Ordnungszahlen. Eine δ-Zahl erfüllt für jede ihr vorangehende α die Gleichung $\alpha\,\delta = \delta$ (*Hessenberg*, § 82).

Wir werden nun den multiplikativen Aufbau des Bereiches bei Zerlegung in endlich viel Faktoren aufzeigen. Dabei definieren wir eine Ordnungszahl als unzerlegbar, wenn sie nicht als Produkt zweier von ihr selbst verschiedener Faktoren darstellbar ist. Das gilt im besonderen für jede δ-Zahl, wie ω^{ω}, ω^{ω^2}, $\ldots$, $\omega^{\omega^{\omega}}$ usw., nicht aber für andere Potenzen von ω, z. B. $\omega^{\omega+1} = \omega^{\omega} \cdot \omega$.

Wie im Anfangsbereich der Polynome in ω, so hat auch jede höhere Ordnungszahl eine endlich-gliedrige Cantorsche Normalform

$$\omega^{\nu} \cdot n + \omega^{\mu} \cdot m + \omega^{\lambda} \cdot l + \ldots + \omega^{\beta} \cdot b + \omega^{\alpha} \cdot a + a_0 \quad (\alpha < \beta < \ldots < \nu)$$

wo die Koeffizienten natürliche Zahlen, die Exponenten aber beliebige Ordnungszahlen — entsprechend der Bereichsgrenze — sind. (Eine endliche Schreibweise erreicht man durch Einführung neuer Zeichen,

z. B. $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \varepsilon$.) Es sind alle Koeffizienten, bis etwa auf das Absolutglied a_0, als positiv anzusehen, indem ich nur die wirklich vorhandenen Bestandteile in der Aufzählung berücksichtige. Und sollte etwa $a_0 = 0$ sein, so läßt sich ω^α nach vorne herausheben und je nachdem α selbst eine Potenz von ω ist oder nicht, als unzerlegbar werten oder weiter zerspalten. Es verbleibt sodann ein Aggregat mit nichtverschwindendem Absolutglied.

Wesentlich ist also auch nur der Fall $a_0 \neq 0$. Da lassen sich die beiden Randkoeffizienten a_0 und n herausheben:

$$\omega^\nu \cdot n + \omega^\mu \cdot m + \ldots + \omega^\alpha \cdot a + a_0 = \\ = a_0 (\omega^\nu + \omega^\mu \cdot m + \ldots + \omega^\alpha \cdot a + 1)\, n \qquad (1)$$

und wir kommen auf ein beiderseits normiertes Aggregat, dessen Randkoeffizienten 1 sind, aus dem sich kein endlicher Zahlenfaktor mehr abspalten läßt. Man kann jedoch nach links den Faktor $\omega^\alpha + 1$ herausheben und erhält die Zerlegung

$$\omega^\nu + \omega^\mu \cdot m + \ldots + \omega^\beta \cdot b + \omega^\alpha \cdot a + 1 = \\ = (\omega^\alpha + 1)(\omega^{\nu-\alpha} + \omega^{\mu-\alpha} \cdot m + \ldots + \omega^{\beta-\alpha} \cdot b + a) \qquad (2)$$

wenn man unter $\nu - \alpha$ die die stets eindeutige Lösung ξ der Gleichung $\alpha + \xi = \nu$ versteht usw. Die für die Abspaltung von $\omega^\alpha + 1$ nach links hinreichende Bedingung, Absolutglied gleich 1 und zweitniederstes Glied von der Höhe α, ist dazu auch notwendig, wie die allgemeine Gestalt eines Linksproduktes mit $\omega^\alpha + 1$ zeigt:

$$(\omega^\alpha + 1)(\omega^\varrho \cdot \sigma + r) = \omega^{\alpha+\varrho} \cdot \sigma + \omega^\alpha \cdot r + 1 \qquad (3)$$

(ϱ, σ beliebig, r endlich $\neq 0$).

Somit läßt sich ein anderer Faktor $\omega^\xi + 1$ aus der linken Seite von (2) nicht herausheben. ($\xi \neq \alpha$).

Daraus folgt, daß die Ordnungszahlen von der Form $\omega^\xi + 1$ unzerlegbar sind. Sie sind offenbar außer den δ-Zahlen der Gestalt ω^{ω^ξ} auch die einzigen unzerlegbaren. Es ist die vollständige Analogie zu den Polynomen in ω, unter welchen die von der Form $\omega^k + 1$ unzerlegbar bleiben. Die Typen ω^ξ heißen auch Hauptzahlen; die unzerlegbaren sind ihre unmittelbaren Nachfolger.

Auf diese Weise kommt man nach (1) und (2) durch fortgesetzte Abspaltung linker Faktoren schließlich zur vollständigen und stets (bis auf die Willkür bei δ-Zahlen) eindeutigen Zerlegung einer beliebigen Ordnungszahl

$$\omega^{\nu} \cdot n + \omega^{\mu} \cdot m + \omega^{\lambda} \cdot l + \ldots + \omega^{\gamma} \cdot c + \omega^{\beta} \cdot b + \omega^{\alpha} \cdot a + a_0 =$$
$$= a_0 (\omega^{\alpha}+1)\, a(\omega^{\beta-\alpha}+1)\, b(\omega^{\gamma-\beta}+1)\, c \ldots l(\omega^{\mu-\lambda}+1)\, m(\omega^{\nu-\mu}+1)\, n \quad (4)$$

Ebenso könnte man auch nach entsprechenden Rechenformeln eine sukzessive Abspaltung nach rechts durchführen.

Somit gilt der Satz über den multiplikativen Aufbau unendlicher Ordnungszahlen:

Es gibt eine eindeutige endliche Zerlegung. Die unzerlegbaren Faktoren sind einerseits die δ-Zahlen $\omega^{\omega^{\xi}}$, andererseits die Nachfolger der Hauptzahlen, $\omega^{\xi} + 1$.

So ist z. B.:

$$\varepsilon + \omega^{\omega^{\omega}} \cdot 2 + \omega^{\omega^2} \cdot 4 + \omega^{\omega \cdot 3+4} \cdot 5 + \omega^{\omega \cdot 3+1} + \omega^5 + 3 =$$
$$= 3\,(\omega^5 + 1)\,(\omega^{\omega \cdot 3+1})\,(\omega^3 + 1)\,5\,(\omega^{\omega^2} + 1)\,4\,(\omega^{\omega^{\omega}} + 1)\,2\,(\varepsilon + 1).$$

Die Gültigkeit dieses Satzes ist, schärfer formuliert, noch so zu verstehen, daß wir bei der Zerlegung einer Ordnungszahl *dieselben* Symbole zulassen wie bei ihrer Darstellung.

Über die Approximation von indefiniten binären quadratischen Formen*.

Von

Herbert Hametner, Linz.

(Eingelangt am 29. März 1951.)

Einleitung.

Es handelt sich im folgenden stets um indefinite binäre quadratische Formen, die wir kurz als Formen bezeichnen werden. Es liege eine beliebige Form $f(x, y) = ax^2 + 2\,bxy + cy^2$ vor. Mit $\varphi\,(a, b, c)$ bezeichnen wir die untere Grenze aller C^2 von folgender Eigenschaft:

Zu zwei beliebigen Zahlen x, y gibt es immer ein Paar von ganzen Zahlen (x_g, y_g), so daß gilt:

$$|\,f\,(x-x_g,\ \ y-y_g)\,| \leqq C^2.$$

Es ist das Ziel dieser Arbeit, die Funktion $\varphi\,(a, b, c)$ abzuschätzen. Wir bezeichnen jede Zahl $C \geqq \varphi\,(a, b, c)$ als Schranke von $f\,(x, y)$.

Minkowski [4] hat einen Satz bewiesen, der in folgender Form ausgesprochen werden kann:

$^1/_2\sqrt{b^2-ac}$ ist Schranke der Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

J. Heinhold [2] verallgemeinerte dieses Problem auf definite und semidefinite Formen und verbesserte im Falle der indefiniten Formen die *Minkowski*sche Schranke.

Auch *Davenport* [1] leitete eine Abschätzung für $\varphi\,(a, b, c)$ her, die kurz darauf von *Varnavides* [6] verbessert wurde.

Heinhold [2] wertete seine Ergebnisse für Formen der Gestalt x^2-Dy^2 und $x^2+xy-{}^1/_4\,(D-1)\,y^2$ numerisch aus und stellte die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. *Varnavides* [6] gibt eine Zusammenstellung jener Fälle, in denen er für obige Formen kleinere Schranken erhält.

---

[1] Auszug aus der approbierten Dissertation (Univ. Wien 1950).

Inkeri [3] gibt ebenfalls Abschätzungen für gewisse Formen an und kann in mehreren Fällen die Schranken für obige Formen herunterdrücken. Er beschäftigt sich in dieser Arbeit auch mit der Frage, wann die von *Heinhold* für diese Formen gefundene Schranke gleich der unteren Grenze ist und gibt einige Kriterien dafür an.

Dieselbe Frage wird auch in einer Arbeit von *Steuerwald* [5] behandelt.

Ich werde in dieser Arbeit ebenfalls eine Abschätzung für $\varphi\,(a, b, c)$ herleiten, welche die Ergebnisse von *Heinhold* als Spezialfall enthält. Ferner werde ich einige Fälle angeben, in denen meine Abschätzung Schranken ergibt, die kleiner als die bisher gefundenen sind.

Herrn Professor *Hofreiter*, auf dessen Anregung diese Arbeit entstand, möchte ich an dieser Stelle für sein großzügiges Entgegenkommen sowie für wertvolle Hinweise zur übersichtlichen Formulierung der Beweise ganz besonders danken.

§ 1.

Aus der Definition der Schranke ergibt sich:

Hilfssatz 1. Geht die Form $\bar{f}\,(\bar{x}, \bar{y})$ durch eine unimodulare Transformation

$$T: x = \alpha\,\bar{x} + \beta\,\bar{y} \quad y = \gamma\,\bar{x} + \delta\,\bar{y}$$

aus der Form $f\,(x, y)$ hervor, so ist jede Schranke von $f\,(x, y)$ auch Schranke von $\bar{f}\,(\bar{x}, \bar{y})$.

Hauptsatz I. Es ist $\varphi\,(0, b, 0) = \dfrac{|b|}{2}$.

Dies folgt aus dem Satz von *Minkowski* [4]. Siehe auch *Heinhold* [2] (Seite 660).

Hilfssatz 2. Es liege eine Form $f\,(x, y)$ vor.

1. Wenn $a\omega^2 + 2\,b\omega + c$ keine rationale Nullstelle hat, dann existiert eine unimodulare Transformation, die die Form $f\,(x, y)$ überführt in

$$\bar{f}\,(x, y) = A\,(x - \omega_1\,y)\,(x - \omega_2\,y)$$

mit $0 < \omega_1 < 1, \quad \omega_2 < -1, \quad -1 \leqq \omega_1\,\omega_2 < 0$.

2. Wenn $a\omega^2 + 2\,b\omega + c$ wenigstens eine rationale Nullstelle hat, dann existiert eine unimodulare Transformation, die die Form $f\,(x, y)$ überführt in

$$\bar{f}\,(x, y) = 2\,B\,(x - \omega_1\,y)\,y \text{ mit } 0 \leqq \omega_1 \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man bei *Heinhold* [2] auf S. 674.

ad 1. Es ist $\frac{\omega_2}{\omega_1} < 0.$

$$\text{Da } |\omega_1\omega_2| \leqq 1, \text{ so ist } |\omega_1\omega_2| \leqq \sqrt{|\omega_1\omega_2|} \leqq \frac{|\omega_1| + |\omega_2|}{2}$$

ad 2. Ist $\omega_1 = 0$, dann liegt eine Form der Gestalt $2Bxy$ vor, für die das Approximationsproblem durch den Hauptsatz I gelöst wurde. Wir dürfen daher annehmen, daß $\omega_1 \neq 0$ ist. Durch die Transformation $x \to y$, $y \to x$ und Multiplikation mit $-\frac{1}{\omega_1}$ geht $2B(x - \omega_1 y)y$ über in $2B(x - \frac{1}{\omega_1} y)x = 2B(x - \bar{\omega}_1 y)(x - \bar{\omega}_2 y)$ mit $\bar{\omega}_1 = \frac{1}{\omega_1} \neq 0$, $\bar{\omega}_2 = 0$. Es ist $\frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1} = 0$ und $|\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2| < \frac{|\bar{\omega}_1| + |\bar{\omega}_2|}{2}$.

Nach diesen Überlegungen können wir uns auf Formen von der Gestalt $(y + ax)(y + bx)$ beschränken, wobei

$$a \neq 0, \ \frac{b}{a} \leqq 0, \ |ab| \leqq \frac{|a| + |b|}{2} \tag{1}$$

gilt. Aus $|ab| \leqq \frac{|a| + |b|}{2}$ folgt

$$-|b| + \frac{|b|}{2|a|} + \tfrac{1}{2} \geqq 0 \tag{2}$$

und

$$-|b| + \frac{|b|}{|a|} + 1 \geqq \frac{|b|}{2|a|} + \tfrac{1}{2} \tag{3}$$

Wir werden nun ein Verfahren herleiten, das es gestattet, zu jeder Form von dieser Gestalt Schranken anzugeben.

§ 2. Umformung des Problems.

Es sei eine Form

$$f(x, y) = (y + ax)(y + bx)$$

mit

$$a \neq 0, \ \frac{b}{a} \leqq 0, \ |ab| \leqq \frac{|a| + |b|}{2}$$

gegeben.

Wir deuten das Zahlenpaar (x, y) als Punkt der (x, y)-Ebene. Sind die Koordinaten eines Punktes ganze Zahlen, so versehen wir sie mit dem Index g und bezeichnen den Punkt (x_g, y_g) als Gitterpunkt. Wir ordnen nun jedem Gitterpunkt $G(x_g, y_g)$ den Bereich aller Punkte (x, y) zu, die der Ungleichung

$$|f(x - x_g,\ y - y_g)| \leqq M$$

genügen und nennen diesen Bereich einen $R(x_g, y_g)$-Bereich. Die Aussage, M ist Schranke der Form $f(x, y)$ bedeutet dann, daß es zu jedem Punkt (x, y) einen Gitterpunkt $G(x_g, y_g)$ gibt, in dessen $R(x_g, y_g)$-Bereich der Punkt (x, y) liegt. Dann überdecken die $R(x_g, y_g)$-Bereiche die (x, y)-Ebene lückenlos. Es gilt auch die Umkehrung: Überdecken die $R(x_g, y_g)$-Bereiche die (x, y)-Ebene lückenlos, dann ist M Schranke.

Durch die Transformation

$$\xi = y + ax, \quad \eta = y + bx, \tag{4}$$

deren Determinante $b - a \neq 0$ ist, ist in der (ξ, η)-Ebene ein Parallelgitter gegeben. Das dem Parallelgitter entsprechende Punktgitter wird gebildet durch diejenigen Punkte der (ξ, η)-Ebene, denen ganze Zahlen x_g und y_g entsprechen. Wir versehen die Koordinaten der Gitterpunkte dieses Punktgitters ebenfalls mit dem Index g. Also

$$\xi_g = y_g + ax_g, \quad \eta_g = y_g + bx_g$$

ξ_g, η_g brauchen nicht ganz zu sein, während x_g, y_g ganz sind. Die Transformation (4) führt den Bereich $R(x_g, y_g)$ in den Bereich

$$|\xi - \xi_g|\,|\eta - \eta_g| \leqq M$$

der (ξ, η)-Ebene über, den wir als $S(\xi_g, \eta_g)$-Bereich bezeichnen wollen. Da die Transformation (4) wegen $b - a \neq 0$ umkehrbar eindeutig ist, überdecken die $S(\xi_g, \eta_g)$-Bereiche die (ξ, η)-Ebene lückenlos, sobald die $R(x_g, y_g)$-Bereiche die (x, y)-Ebene lückenlos überdecken und umgekehrt. Wir können daher sagen: M ist genau dann Schranke der Form $f(x, y)$, wenn die $S(\xi_g, \eta_g)$-Bereiche die (ξ, η)-Ebene lückenlos überdecken.

Wir ordnen nun dem Nullpunkt O der (ξ, η)-Ebene den Bereich

$$\Theta(0, 0): \begin{cases} 0 \leqq \xi \leqq |a| \\ \dfrac{b}{a}\,\xi + \dfrac{b}{2a} - \tfrac{1}{2} \leqq \eta \leqq \dfrac{b}{a}\,\xi - \dfrac{b}{2a} + \tfrac{1}{2} \end{cases}$$

zu. Jedem anderen Gitterpunkt $G(\xi_g, \eta_g)$ ordnen wir denjenigen Bereich zu, der durch Verschiebung des Bereiches $\Theta(0, 0)$ um den Gittervektor

$\overrightarrow{OG}$ hervorgeht. Wir nennen diesen Bereich einen $\Theta(\xi_g, \eta_g)$-Bereich. Dieser ist durch die Ungleichungen

$$\begin{cases} 0 \leqq \xi - \xi_g \leqq |a| \\ \frac{b}{a}(\xi - \xi_g) + \frac{b}{2a} - \frac{1}{2} \leqq \eta - \eta_g \leqq \frac{b}{a}(\xi - \xi_g) - \frac{b}{2a} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

gegeben.

Behauptung: Die $\Theta(\xi_g, \eta_g)$-Bereiche überdecken die (ξ, η)-Ebene lückenlos.

Beweis: Zunächst überlegen wir uns, daß die Bereiche

$$B_k: \frac{b}{a}\xi - \frac{b}{a}(k - \tfrac{1}{2}) + k - \tfrac{1}{2} \leqq \eta \leqq \frac{b}{a}\xi - \frac{b}{a}(k + \tfrac{1}{2}) + k + \tfrac{1}{2} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

die (ξ, η)-Ebene lückenlos überdecken:

Es sei ein beliebiger Punkt (ξ^*, η^*) gegeben. Wir betrachten die Intervalle

$$a_k = \frac{b}{a}\xi^* - \frac{b}{a}(k - \tfrac{1}{2}) + k - \tfrac{1}{2} \leqq \eta \leqq \frac{b}{a}\xi^* - \frac{b}{a}(k + \tfrac{1}{2}) + k + \tfrac{1}{2} = b_k.$$

Es ist $b_k - a_k = 1 - \frac{b}{a} = 1 + \frac{|b|}{|a|}$. Geht man von k zu $k \pm 1$ über, so verschiebt sich $a_{k\pm1}$ gegenüber a_k um $\pm(1 + \frac{|b|}{|a|})$. Man kann daher k stets so wählen, daß

$$0 \leqq \eta^* - a_k \leqq 1 + \frac{|b|}{|a|}.$$

Dann ist

$$a_k \leqq \eta^* \leqq 1 + \frac{|b|}{|a|} + a_k = b_k.$$

Das heißt: Der Punkt (ξ^*, η^*) liegt in B_k.

Wenn wir nun zeigen, daß jeder Punkt eines Bereiches B_k in einem $\Theta(\xi_g, \eta_g)$-Bereich liegt, dann ist unsere Behauptung bewiesen:

Es sei also (ξ, η) ein beliebiger Punkt eines Bereiches B_k. Wir betrachten den Gitterpunkt $(\xi_g = k + na, \eta_g = k + nb)$, wobei n ganz und so gewählt ist, daß $0 \leqq \xi - k - na \leqq |a|$. Ferner addieren wir zur Ungleichung

$$\frac{b}{a}\,\xi - \frac{b}{a}\,(k - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} \leqq \eta - k \leqq \frac{b}{a}\,\xi - \frac{b}{a}\,(k + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}$$

die Gleichung

$$-\frac{b}{a}\,(na) = -nb = -\frac{b}{a}\,(na)$$

und erhalten:

$$\frac{b}{a}\,(\xi - k - na) + \frac{b}{2a} - \tfrac{1}{2} \leqq \eta - k - nb \leqq \frac{b}{a}\,(\xi - k - na) - \frac{b}{2a} + \tfrac{1}{2}.$$

Das heißt: Der Punkt (ξ, η) liegt im Bereich $\Theta\,(k + na, k + nb)$.

Wir teilen nun den Bereich $\Theta\,(0, 0)$ folgendermaßen in zwei Bereiche:

$$(A)\begin{cases} 0 \leqq \xi \leqq |a| \\ \dfrac{b}{a}\,\xi \leqq \eta \leqq \dfrac{b}{a}\,\xi - \dfrac{b}{2a} + \tfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} 0 \leqq \xi \leqq |a| \\ \dfrac{b}{a}\,\xi + \dfrac{b}{2a} - \tfrac{1}{2} \leqq \eta \leqq \dfrac{b}{a}\,\xi. \end{cases}$$

Behauptung: Wird der Bereich (A) von $S\,(\xi_g, \eta_g)$-Bereichen lückenlos überdeckt, dann wird auch der Bereich B von $S\,(\xi_g, \eta_g)$-Bereichen lückenlos überdeckt.

Beweis: Es sei (ξ, η) irgendein Punkt des Bereiches (B). Wir betrachten nun den Punkt $(|a| - \xi, -|b| - \eta)$. Dieser Punkt liegt im Bereich (A). Denn es ist $0 \leqq |a| - \xi \leqq |a|$ und

$$\frac{b}{a}\,(|a| - \xi) \leqq -|b| - \eta \leqq \frac{b}{a}\,(|a| - \xi) - \frac{b}{2a} + \tfrac{1}{2}.$$

Falls der Bereich (A) von $S\,(\xi_g, \eta_g)$-Bereichen lückenlos überdeckt wird, gibt es einen Gitterpunkt (ξ_g, η_g), für den gilt:

$$|\,|a| - \xi - \xi_g\,| \,.\, |-|b| - \eta - \eta_g\,| \leqq M.$$

Der Punkt $(|a|, -|b|)$ ist Gitterpunkt. Also auch der Punkt

$$(\xi_g{}^* = |a| - \xi_g,\ \ \eta_g{}^* = -|b| - \eta_g).$$

Für den Punkt $(\xi_g{}^*, \eta_g{}^*)$ gilt:

$$|\xi - \xi_g{}^*|\,|\eta - \eta_g{}^*| = |\xi - |a| + \xi_g|\,|\eta + |b| + \eta_g| \leqq M.$$

Das heißt: Der Punkt (ξ, η) liegt im Bereich $S\,(\xi_g{}^*, \eta_g{}^*)$.

Wird also der Bereich (A) von $S\,(\xi_g, \eta_g)$-Bereichen lückenlos überdeckt, dann wird auch der Bereich (B) und damit der ganze Bereich $\Theta\,(0, 0)$ von $S\,(\xi_g, \eta_g)$-Bereichen lückenlos überdeckt. Da der Bereich $\Theta\,(0, 0)$ vor den anderen $\Theta\,(\xi_g, \eta_g)$-Bereichen in keiner Weise ausgezeichnet ist, wird dann jeder $\Theta\,(\xi_g, \eta_g)$-Bereich von $S\,(\xi_g, \eta_g)$-Bereichen lückenlos überdeckt. Da die $\Theta\,(\xi_g, \eta_g)$-Bereiche die (ξ, η)-Ebene

lückenlos überdecken, überdecken dann die $S(\xi_g, \eta_g)$-Bereiche die (ξ, η)-Ebene lückenlos. Also:

Wird der Bereich (A) von $S(\xi_g, \eta_g)$-Bereichen lückenlos überdeckt, so wird die ganze (ξ, η)-Ebene lückenlos überdeckt und M ist Schranke der Form $f(x, y)$.

§ 3. Herleitung von Schranken.

Wir suchen nun $2n$ ganze Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}, \ldots, k_{2n}$, welche folgende Eigenschaften haben sollen:

$$0 \leqq 1 - k_1 \,|\, a \,| \leqq |\, a \,| \qquad 0 \leqq k_{n+1} \,|\, a \,| - 1 \leqq |\, a \,|$$
$$0 \leqq 2 - k_2 \,|\, a \,| \leqq |\, a \,| \qquad 0 \leqq k_{n+2} \,|\, a \,| - 2 \leqq |\, a \,|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 \leqq n - k_n \,|\, a \,| \leqq |\, a \,| \qquad 0 \leqq k_{2n} \,|\, a \,| - n \leqq |\, a \,|.$$

Dann betrachten wir die Gitterpunkte in der (ξ, η)-Ebene:

$$(1 - k_1 \,|\, a \,|,\ 1 + k_1 \,|\, b \,|) \qquad (k_{n+1} \,|\, a \,| - 1,\ -k_{n+1} \,|\, b \,| - 1)$$
$$(2 - k_2 \,|\, a \,|,\ 2 + k_2 \,|\, b \,|) \qquad (k_{n+2} \,|\, a \,| - 2,\ -k_{n+2} \,|\, b \,| - 2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n - k_n \,|\, a \,|,\ n + k_n \,|\, b \,|) \qquad (k_{2n} \,|\, a \,| - n,\ -k_{2n} \,|\, b \,| - n)$$
$$(0, 0) \qquad (\,|\, a \,|,\ -|\, b \,|)$$

Aus dieser Menge von Gitterpunkten greifen wir $r + 2$ Gitterpunkte mit paarweise verschiedenen ξ_i ($\xi_j \neq \xi_k$ für $j \neq k$)

$(0, 0) = (\xi_0, \eta_0), (\xi_1, \eta_1), \ldots\ldots (\xi_r, \eta_r), (\xi_{r+1}, \eta_{r+1}) = (\,|\, a \,|, -|\, b \,|)$

heraus. Die Bezeichnung soll so gewählt sein, daß

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots\ldots\ldots < \xi_r < |\, a \,| \tag{5}$$

(Die maximale Anzahl der Gitterpunkte, die man auf diese Art herausgreifen kann, hängt von $|\, a \,|$ ab.)

Aus (1) folgt

$$|\, ab \,| < |\, a \,| + |\, b \,|$$

Wir können eine Zahl $k > 0$ (nicht notwendig ganz) nehmen, mit

$$|\, ab \,| \leqq 4\, k < |\, a \,| + |\, b \,|. \tag{6}$$

Dann gilt

$$0 < -|\, ab \,| + 2\, k + \sqrt{a^2\, b^2 + 4\, k^2} < |\, a \,| + |\, b \,|. \tag{7}$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$\varrho = \frac{2k - |ab| + \sqrt{a^2 b^2 + 4k^2}}{2|a|} \tag{8}$$

und erhalten aus (7) und (8)

$$0 < \varrho < \frac{|b|}{2|a|} + \tfrac{1}{2}.$$

Ferner setzen wir

$$\sigma_i = \frac{b}{a}\xi_i - \frac{b}{2a} + \tfrac{1}{2} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r). \tag{10}$$

Daraus, aus (5) und (2) folgt

$$0 < \sigma_i \leqq \frac{|b|}{2|a|} + \tfrac{1}{2}. \tag{11}$$

Wir ordnen nun je zwei aufeinanderfolgenden Gitterpunkten (ξ_i, η_i), (ξ_{i+1}, η_{i+1}) einen Funktionswert $\Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})]$ zu. Dieser wird folgendermaßen definiert: $\Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})] =$

I. $\dfrac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\dfrac{1}{|\sigma_i - \eta_i|} + \dfrac{1}{|\sigma_i - \eta_{i+1}|}}$, wenn

a) $\eta_i \leqq \dfrac{b}{a}\xi_i$ und $\eta_{i+1} \leqq \dfrac{b}{a}\xi_{i+1}$

b) $\eta_i \leqq \dfrac{b}{a}\xi_i$, $\eta_{i+1} \geqq \dfrac{b}{a}\xi_{i+1} - \dfrac{b}{a} + 1$ und $\eta_i + \eta_{i+1} \geqq \dfrac{b}{a}(\xi_i + \xi_{i+1}) - \dfrac{2b}{a} + 2$

c) $\eta_i \geqq \dfrac{b}{a}\xi_i - \dfrac{b}{a} + 1$, $\eta_{i+1} \leqq \dfrac{b}{a}\xi_{i+1}$ und $\eta_i + \eta_{i+1} \geqq \dfrac{b}{a}(\xi_i + \xi_{i+1}) - \dfrac{2b}{a} + 2$

II. $\dfrac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\dfrac{1}{|\varrho - \eta_i|} + \dfrac{1}{|\varrho - \eta_{i+1}|}}$, wenn

a) $\eta_i \geqq \dfrac{b}{a}\xi_i - \dfrac{b}{a} + 1$ und $\eta_{i+1} \geqq \dfrac{b}{a}\xi_{i+1} - \dfrac{b}{a} + 1$

b) $\eta_i \leqq \dfrac{b}{a}\xi_i$, $\eta_{i+1} \geqq \dfrac{b}{a}\xi_{i+1} - \dfrac{b}{a} + 1$ und $\eta_i + \eta_{i+1} \leqq \dfrac{b}{a}(\xi_i + \xi_{i+1})$

c) $\eta_i \geqq \dfrac{b}{a}\xi_i - \dfrac{b}{a} + 1$, $\eta_{i+1} \leqq \dfrac{b}{a}\xi_{i+1}$ und $\eta_i + \eta_{i+1} \leqq \dfrac{b}{a}(\xi_i + \xi_{i+1})$

III. $\dfrac{|(\xi_{i+1}-\xi_i)(\eta_{i+1}-\eta_i)|}{4}$, wenn $\eta_i+\eta_{i+1}=\dfrac{b}{a}(\xi_i+\xi_{i+1})-\dfrac{b}{a}+1.$

Es ist zu zeigen, daß für jedes Paar von Gitterpunkten (ξ_i, η_i), (ξ_{i+1}, η_{i+1}) einer der Fälle I (a, b, c), II (a, b, c), III zutrifft. Dies folgt leicht aus den beiden folgenden Hilfssätzen.

Hilfssatz 3. Es gibt keinen Gitterpunkt (ξ_i, η_i), für den

$$\frac{b}{a}\xi_i < \eta_i < \frac{b}{a}\xi_i - \frac{b}{a} + 1.$$

Würde es einen solchen Gitterpunkt geben — wir nennen ihn $(r+as, r+bs)$, wo r, s ganz — so wäre

$$\frac{b}{a}(r+as) < r+bs < \frac{b}{a}(r+as) - \frac{b}{a} + 1,$$

$$0 < (1-\frac{b}{a})\,r < 1 - \frac{b}{a},$$

$$0 < r < 1$$

Wid., da r ganz.

Hilfssatz 4. Für jedes Paar von Gitterpunkten (ξ_i, η_i), (ξ_{i+1}, η_{i+1}) trifft weder

a) $\dfrac{b}{a}(\xi_i+\xi_{i+1}) < \eta_i+\eta_{i+1} < \dfrac{b}{a}(\xi_i+\xi_{i+1}) - \dfrac{b}{a} + 1$

noch

b) $\dfrac{b}{a}(\xi_i+\xi_{i+1}) - \dfrac{b}{a} + 1 < \eta_i+\eta_{i+1} < \dfrac{b}{a}(\xi_i+\xi_{i+1}) - \dfrac{2b}{a} + 2$

zu.

Es wäre auch $(\xi_i+\xi_{i+1}, \eta_i+\eta_{i+1}) = (r+as, r+bs)$ Gitterpunkt. Nach Hilfssatz 3 ist a) nicht möglich. Es wäre

$$\frac{b}{a}(r+as) - \frac{b}{a} + 1 < r+bs < \frac{b}{a}(r+as) - \frac{2b}{a} + 2,$$

$$0 < (1-\frac{b}{a})(r-1) < 1 - \frac{b}{a},$$

$$0 < r-1 < 1 \qquad \text{Wid. da } r \text{ ganz.}$$

Aus (1)—(3), (5), (9)—(11) folgt, daß keiner der auftretenden Nenner verschwindet.

Nun behaupten wir:

Hauptsatz II. Jede Zahl $M \geqq \operatorname{Max}_{i=0,1,\ldots,r} \{k, \Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})]\}$ *ist Schranke der Form* $(y+ax)(y+bx)$.

Beweis: Der Hauptsatz II ist richtig, wenn die Bereiche $S(\xi_i, \eta_i)$ $(i=0, 1, \ldots, r+1)$ für jedes $M \geqq \operatorname{Max}_{i=0,1,\ldots,r} \{k, \Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})]\}$ den Bereich (A) aus § 2 lückenlos überdecken. Dies wollen wir nun zeigen:

Wir beweisen den

Satz 1. Ist $M \geqq k$, dann wird der Bereich

$$0 \leqq \xi \leqq |a|, \quad \frac{b}{a}\xi \leqq \eta \leqq \varrho$$

von den Bereichen $S(0, 0)$ und $S(|a|, -|b|)$ lückenlos überdeckt.

a) Alle Punkte des Bereiches

$$0 \leqq \xi \leqq \frac{k}{\varrho}, \quad 0 \leqq \eta \leqq \varrho$$

gehören zum Bereich $S(0, 0)$. Denn für diese Punkte ist $|\xi\eta| \leqq k \leqq M$.

b) Alle Punkte des Bereiches

$$\frac{k}{\varrho} \leqq \xi \leqq |a|, \quad 0 \leqq \eta \leqq \varrho$$

gehören dem Bereich $S(|a|, -|b|)$ an. Denn für diese Punkte ist

$$|\xi - |a||\,|\eta + |b|| \leqq \left|\frac{k}{\varrho} - |a|\right|\,|\varrho + |b|| = \frac{1}{\varrho}|k\varrho - \varrho^2|a| + k|b| - \varrho|ab|| =$$
$$= k \leqq M,$$

wie sich aus (8) ergibt.

c) Nun betrachten wir den Bereich

$$0 \leqq \xi \leqq |a|, \quad \frac{b}{a}\xi \leqq \eta \leqq 0.$$

Es gehören alle Punkte des Bereiches

$$0 \leqq \xi \leqq \sqrt{M\frac{|a|}{|b|}}, \quad \frac{b}{a}\xi \leqq \eta \leqq 0$$

zum Bereich $S(0, 0)$. Denn es ist

$$|\xi\eta| \leqq \sqrt{M\frac{|a|}{|b|}}\;\frac{|b|}{|a|}\,\xi \leqq M.$$

Es bleibt der Bereich

$$\sqrt{M\frac{|a|}{|b|}} < \xi \leqq |a|, \quad \frac{b}{a}\xi \leqq \eta \leqq 0$$

zu diskutieren.

Ist $M \geqq |ab|$, so ist

$$|\xi|\,|\eta| \leqq |a|\frac{|b|}{|a|}\xi \leqq |a|\,|b| \leqq M.$$

Ist $M < |ab|$, so ist wegen $M \geqq k \geqq \frac{|ab|}{4}$ jedenfalls $M \geqq \frac{|ab|}{4}$ und somit $\xi > \frac{|a|}{2}$.

Wir zeigen: Gilt für einen Punkt

$$|\xi\eta| \geqq \frac{|ab|}{4},$$

dann liegt er in $S(|a|, -|b|)$. Wir betrachten hiezu die Funktion

$$f(\xi) = \xi|b| + \frac{|ab|}{4\xi}(|a| - \xi)$$

$$f'(\xi) = |b| - \frac{|a^2 b|}{4\xi^2} \geqq 0 \text{ für } \xi \geqq \frac{|a|}{2}$$

$$f\left(\frac{|a|}{2}\right) = \frac{3|ab|}{4}.$$

Daher ist $f(\xi) \geqq \frac{3|ab|}{4}$ für $\xi \geqq \frac{|a|}{2}$. Es ist ferner

$$\frac{3|ab|}{4} \leqq \xi|b| + \frac{|ab|}{4\xi}(|a| - \xi) \leqq \xi|b| + |\eta|(|a| - \xi).$$

Daraus folgt

$$|ab| - \xi|b| + \eta(|a| - \xi) = (|a| - \xi)(|b| + \eta) \leqq \frac{|ab|}{4}$$

und (ξ, η) liegt in $S(|a|, -|b|)$.

Gilt für einen Punkt

$$|\xi\eta| \leqq \frac{|ab|}{4},$$

dann liegt er in $S(0, 0)$. Aus a), b) und c) folgt Satz 1.

Wir werden folgenden Satz beweisen:

Satz 2. Wenn $M \geqq \Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})]$ ist, dann wird der Bereich

$$\xi_i \leqq \xi \leqq \xi_{i+1}, \quad \varrho < \eta \leqq \frac{b}{a}\,\xi - \frac{b}{2a} + \tfrac{1}{2}$$

von den Bereichen $S(\xi_i, \eta_i)$, $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ lückenlos überdeckt. Hiezu führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$P(\eta) = \frac{M}{|\eta - \eta_i|} + \frac{M}{|\eta - \eta_{i+1}|} + \xi_i - \xi_{i+1} \tag{12}$$

und beweisen

Hilfssatz 5. Wenn $P(\eta) \geqq 0$, so wird der Bereich

$$\xi_i \leqq \xi \leqq \xi_{i+1}, \quad \eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_2$$

von den Bereichen $S(\xi_i, \eta_i)$, $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ lückenlos überdeckt.

Beweis:

α) Es gehören die Punkte der Strecke:

$$\eta = \bar{\eta}, \quad \xi_i \leqq \xi \leqq \frac{M}{|\bar{\eta} - \eta_i|} + \xi_i$$

zum Bereich $S(\xi_i, \eta_i)$.

β) Es gehören die Punkte der Strecke:

$$\eta = \bar{\eta}, \quad \frac{-M}{|\bar{\eta} - \eta_{i+1}|} + \xi_{i+1} \leqq \xi \leqq \xi_{i+1}$$

zum Bereich $S(\xi_{i+1}, \xi_{i+1})$.

Aus α) folgt:

γ) Die Punkte des Bereiches

$$\xi_i \leqq \xi \leqq \frac{M}{|\eta - \eta_i|} + \xi_i, \; \eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_2$$

gehören zu $S(\xi_i, \eta_i)$;

aus β) folgt:

δ) Die Punkte des Bereiches

$$\frac{-M}{|\eta - \eta_{i+1}|} + \xi_{i+1} \leqq \xi \leqq \xi_{i+1}, \quad \eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_2$$

gehören zu $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$.

Gilt die Ungleichung $P(\eta) \geqq 0$, so überdecken die Intervalle

$$\xi_i \leqq \xi \leqq \frac{M}{|\eta - \eta_i|} + \xi_i, \quad \frac{-M}{|\eta - \eta_{i+1}|} + \xi_{i+1} \leqq \xi \leqq \xi_{i+1}$$

das Intervall $\xi_i \leqq \xi \leqq \xi_{i+1}$ lückenlos.

Daraus, aus γ) und δ) ergibt sich Hilfssatz 5.

Wir beweisen nun

Hilfssatz 6. Im Falle I (a, b, c) wird der Bereich

$$\xi_i \leqq \xi \leqq \xi_{i+1}, \quad 0 < \eta \leqq \sigma_i$$

von den Bereichen $S(\xi_i, \eta_i)$, $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ lückenlos überdeckt.

Im Falle Ia ist

$$\Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})] = \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\frac{1}{\sigma_i - \eta_i} + \frac{1}{\sigma_i - \eta_{i+1}}}$$

Nach (12) ist für $\eta < 0$

$$P(\eta) = \frac{M}{\eta - \eta_i} + \frac{M}{\eta - \eta_{i+1}} + \xi_i - \xi_{i+1},$$

$$P(\sigma_i) = \frac{M}{\sigma_i - \eta_i} + \frac{M}{\sigma_i - \eta_{i+1}} + \xi_i - \xi_{i+1} \geqq \Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})] \left[\frac{1}{\sigma_i - \eta_i} + \frac{1}{\sigma_i - \eta_{i+1}}\right] + \xi_i - \xi_{i+1} = 0$$

Es ist $\dfrac{dP(\eta)}{d\eta} = -\dfrac{M}{(\eta - \eta_i)^2} - \dfrac{M}{(\eta - \eta_{i+1})^2} < 0$, also $P(\eta)$ monoton fallend. Da $P(\sigma_i) \geqq 0$ ist, so ist $P(\eta) \geqq 0$ für $0 < \eta \leqq \sigma_i$.

Nach Hilfssatz 5 wird somit der im Hilfssatz 6 angegebene Bereich von den Bereichen $S(\xi_i, \eta_i)$, $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ lückenlos überdeckt und es ist somit Hilfssatz 6 im Falle Ia) bewiesen.

In den Fällen 1b) und Ic) ergibt sich aus (1), (2), (5), (10) und (11)

$$\operatorname{Min}(\eta_i, \eta_{i+1}) < \sigma_i < \operatorname{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}).$$

Daraus folgt:

$$\Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})] = \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\frac{1}{\sigma_i - \operatorname{Min}(\eta_i, \eta_{i+1})} + \frac{1}{\operatorname{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \sigma_i}}.$$

Für $0 < \eta \leqq \sigma_i$ ist

$$\operatorname{Min}(\eta_i, \eta_{i+1}) < \eta < \operatorname{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}).$$

Daher

$$P(\eta) = \frac{M}{\eta - \operatorname{Min}(\eta_i, \eta_{i+1})} + \frac{M}{\operatorname{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \eta} + \xi_i - \xi_{i+1},$$

$$P(\sigma_i) = \frac{M}{\sigma_i - \mathrm{Min}(\eta_i, \eta_{i+1})} + \frac{M}{\mathrm{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \sigma_i} + \xi_i - \xi_{i+1} \geqq$$

$$\geqq \Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})] \left[\frac{1}{\sigma_i - \mathrm{Min}(\eta_i, \eta_{i+1})} + \frac{1}{\mathrm{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \sigma_i}\right] +$$

$$+ \xi_i - \xi_{i+1} = 0.$$

Es ist

$$\frac{dP(\eta)}{d\eta} = \frac{-M}{(\eta - \mathrm{Min}(\eta_i, \eta_{i+1}))^2} + \frac{M}{(\mathrm{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \eta)^2}.$$

Es ist

$$0 < \eta \leqq \sigma_i \leqq \frac{|b|}{2|a|} + \tfrac{1}{2} \leqq -|b| + \frac{|b|}{|a|} + 1 \leqq -\frac{|b|}{|a|} \cdot$$

$$\cdot \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2} + \frac{|b|}{|a|} + 1 \leqq \frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2}$$

nach (11), (3), (5), I. (b, c).

Daher ist

$$2\eta \leqq \eta_i + \eta_{i+1} = \mathrm{Min}(\eta_i, \eta_{i+1}), + \mathrm{Max}(\eta_i, \eta_{i+1})$$

und

$$\frac{M}{(\eta - \mathrm{Min}(\eta_i, \eta_{i+1}))^2} \geqq \frac{M}{(\mathrm{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \eta)^2},$$

d. h.

$$\frac{dP(\eta)}{d\eta} \leqq 0,$$

also ist $P(\eta)$ monoton fallend in $0 < \eta \leqq \sigma_i$. Da $P(\sigma_i) \geqq 0$ ist, so ist $P(\eta) \geqq 0$ in $0 < \eta \leqq \sigma_i$. Nach Hilfssatz 5 wird der in Hilfssatz 6 angegebene Bereich von den Bereichen $S(\xi_i, \eta_i)$, $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ lückenlos überdeckt und somit ist Hilfssatz 6 auch im Falle I. b) und I. c) bewiesen.

Es ist nach (9) $\varrho > 0$, ferner ist nach (10) $\sigma_i \geqq \frac{b}{a}\xi - \frac{b}{2a} + \frac{1}{2}$ für $\xi_i \leqq \xi \leqq \xi_{i+1}$. Somit liegt der im Satz 2 genannte Bereich ganz im Bereich von Hilfssatz 6. Daher ist Satz 2 für die Fälle I (a, b, c) bewiesen.

Wir beweisen nun

Hilfssatz 7. Im Falle II (a, b, c) wird der Bereich

$$\xi_i \leqq \xi \leqq \xi_{i+1}, \quad \varrho < \eta \leqq \frac{|b|}{2|a|} + \tfrac{1}{2}$$

von den Bereichen $S(\xi_i, \eta_i)$, $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ lückenlos überdeckt.

Aus (1), (3), (5) und (9) folgt, daß im Falle II. a) gilt:

$$\Phi\left[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})\right] = \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\frac{1}{\eta_i - \varrho} + \frac{1}{\eta_{i+1} - \varrho}}.$$

Durch Anwendung von (3) und (12) sieht man ferner, daß für

$$\varrho \leqq \eta \leqq \frac{|b|}{2|a|} + \tfrac{1}{2}$$

$$P(\eta) = \frac{M}{\eta_i - \eta} + \frac{M}{\eta_{i+1} - \eta} + \xi_i - \xi_{i+1}.$$

$$P(\varrho) = \frac{M}{\eta_i - \varrho} + \frac{M}{\eta_{i+1} - \varrho} + \xi_i - \xi_{i+1} \geqq$$

$$\geqq \Phi\left[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})\right] \left[\frac{1}{\eta_i - \varrho} + \frac{1}{\eta_{i+1} - \varrho}\right] + \xi_i - \xi_{i+1} = 0.$$

Es ist

$$\frac{d\,P(\eta)}{d\eta} = \frac{M}{(\eta_i - \eta)^2} + \frac{M}{(\eta_{i+1} - \eta)^2} > 0.$$

Also ist $P(\eta)$ für $\varrho \leqq \eta \leqq \frac{|b|}{2|a|} + \frac{1}{2}$ monoton wachsend und $\geqq 0$. Nach Hilfssatz 5 wird der im Hilfssatz 7 angegebene Bereich von den Bereichen $S(\xi_i, \eta_i)$, $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ lückenlos überdeckt und es ist somit Hilfssatz 7 im Falle II a) bewiesen.

In den Fällen II b) und II c) folgt aus (3), (5) und (9)

$$\operatorname{Min}(\eta_i, \eta_{i+1}) < \varrho < \operatorname{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}).$$

Daher ist

$$\Phi\left[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})\right] = \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\frac{1}{\varrho - \operatorname{Min}(\eta_i, \eta_{i+1})} + \frac{1}{\operatorname{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \varrho}}.$$

Für $\varrho \leqq \eta \leqq \frac{|b|}{2|a|} + \frac{1}{2}$ ist

$$\operatorname{Min}(\eta_i, \eta_{i+1}) < \eta < \operatorname{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}).$$

Somit ist

$$P(\eta) = \frac{M}{\eta - \operatorname{Min}(\eta_i, \eta_{i+1})} + \frac{M}{\operatorname{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \eta} + \xi_i - \xi_{i+1},$$

$$P(\varrho) = \frac{M}{\varrho - \mathrm{Min}(\eta_i, \eta_{i+1})} + \frac{M}{\mathrm{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \varrho} + \xi_i - \xi_{i+1} \geqq$$

$$\geqq \Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})] \left[\frac{1}{\varrho - \mathrm{Min}(\eta_i, \eta_{i+1})} + \frac{1}{\mathrm{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \varrho}\right] +$$

$$+ \xi_i - \xi_{i+1} = 0.$$

Es ist

$$\frac{dP(\eta)}{d\eta} = \frac{-M}{(\eta - \mathrm{Min}(\eta_i, \eta_{i+1}))^2} + \frac{M}{(\mathrm{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \eta)^2}.$$

Ferner ist

$$\eta_i + \eta_{i+1} \leqq \frac{b}{a}(\xi_i + \xi_{i+1}) \leqq 0 < 2\varrho \leqq 2\eta,$$

also

$$\mathrm{Min}(\eta_i, \eta_{i+1}) + \mathrm{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) < 2\eta;$$

$$\frac{M}{(\mathrm{Max}(\eta_i, \eta_{i+1}) - \eta)^2} > \frac{M}{(\eta - \mathrm{Min}(\eta_i, \eta_{i+1}))^2},$$

daher

$$\frac{dP(\eta)}{d\eta} > 0,$$

also ist $P(\eta)$ in $\varrho \leqq \eta \leqq \frac{|b|}{2|a|} + \frac{1}{2}$ monoton wachsend und $\geqq 0$. Nach Hilfssatz 5 wird der im Hilfssatz 7 genannte Bereich von den Bereichen $S(\xi_i, \eta_i)$, $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ lückenlos überdeckt und es ist Hilfssatz 7 auch im Falle II. b) und II. c) bewiesen.

Es ist $\frac{b}{a}\xi - \frac{b}{2a} + \frac{1}{2} \leqq \frac{|b|}{2|a|} + \frac{1}{2}$.

Somit liegt der Bereich aus Satz 2 ganz im Bereich von Hilfssatz 7. Daher ist Satz II für die Fälle II (a, b, c) bewiesen.

Wir beweisen nun

Hilfssatz 8. Im Falle III wird der Bereich

$$\xi_i \leqq \xi \leqq \xi_{i+1},\ 0 < \eta \leqq \frac{|b|}{2|a|} + \frac{1}{2}$$

von den Bereichen $S(\xi_i, \eta_i)$, $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ lückenlos überdeckt.

Im Fall III ist

$$\eta_i + \eta_{i+1} = \frac{b}{a}(\xi_i + \xi_{i+1}) - \frac{b}{a} + 1 \qquad (13)$$

und

$$\Phi\,[(\xi_i,\,\eta_i),\,(\xi_{i+1},\,\eta_{i+1})] = \frac{(\xi_{i+1}-\xi_i)\,(\mathrm{Max}\,(\eta_i,\,\eta_{i+1}) - \mathrm{Min}\,(\eta_i,\,\eta_{i+1}))}{4}.$$

Nach Hilfssatz 3 gibt es nur die beiden Fälle:

$$\alpha)\ \eta_i \geqq \frac{b}{a}\,\xi_i - \frac{b}{a} + 1, \qquad \beta)\ \eta_i \leqq \frac{b}{a}\,\xi_i.$$

Aus (3), (5) und (13) folgt

$$\mathrm{Min}\,(\eta_i,\,\eta_{i+1}) \leqq 0 < \frac{|\,b\,|}{2\,|\,a\,|} + \tfrac{1}{2} < \mathrm{Max}\,(\eta_i,\,\eta_{i+1}).$$

Ferner ist für

$$0 < \eta \leqq \frac{|\,b\,|}{2\,|\,a\,|} + \tfrac{1}{2}$$

$$P\,(\eta) = \frac{M}{\eta - \mathrm{Min}\,(\eta_i,\,\eta_{i+1})} + \frac{M}{\mathrm{Max}\,(\eta_i,\,\eta_{i+1}) - \eta} + \xi_i - \xi_{i+1}.$$

Aus (13) folgt nach (2), (3), (5)

$$0 \leqq -\,|\,b\,| + \frac{|\,b\,|}{2\,|\,a\,|} + \tfrac{1}{2} < \frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2} \leqq \frac{|\,b\,|}{2\,|\,a\,|} + \tfrac{1}{2}.$$

Daher

$$P\left(\frac{\eta_i+\eta_{i+1}}{2}\right) = \frac{M}{\frac{\eta_i+\eta_{i+1}}{2} - \mathrm{Min}(\eta_i,\eta_{i+1})} + \frac{M}{\mathrm{Max}(\eta_i,\eta_{i+1}) - \frac{\eta_i+\eta_{i+1}}{2}} +$$

$$+\xi_i - \xi_{i+1} = \frac{4M}{\mathrm{Max}(\eta_i,\eta_{i+1}) - \mathrm{Min}(\eta_i,\eta_{i+1})} + \xi_i - \xi_{i+1} \geqq \Phi\,[(\xi_i,\,\eta_i),$$

$$(\xi_{i+1},\,\eta_{i+1})]\,\frac{4}{\mathrm{Max}(\eta_i,\eta_{i+1}) - \mathrm{Min}(\eta_i,\eta_{i+1})} + \xi_i - \xi_{i+1} = 0.$$

Es ist

$$\frac{d\,P\,(\eta)}{d\eta} = \frac{-M}{(\eta - \mathrm{Min}\,(\eta_i,\,\eta_{i+1}))^2} + \frac{M}{(\mathrm{Max}\,(\eta_i,\,\eta_{i+1}) - \eta)^2}.$$

Ist

$$0 < \eta \leqq \frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2}$$

so ist

$$2\,\eta \leqq \mathrm{Min}\,(\eta_i,\,\eta_{i+1}) + \mathrm{Max}\,(\eta_i,\,\eta_{i+1}),$$

$$\frac{M}{(\eta - \mathrm{Min}\,(\eta_i, \eta_{i+1}))^2} \geqq \frac{M}{(\mathrm{Max}\,(\eta_i, \eta_{i+1}) - \eta)^2},$$

also $\dfrac{d\,P(\eta)}{d\,\eta} \leqq 0$, daher $P(\eta)$ monoton fallend.

Ist

$$\frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2} < \eta \leqq \frac{|\,b\,|}{2\,|\,a\,|} + \tfrac{1}{2},$$

so ist

$$\mathrm{Max}\,(\eta_i, \eta_{i+1}) + \mathrm{Min}\,(\eta_i, \eta_{i+1}) < 2\,\eta,$$

$$\frac{M}{(\mathrm{Max}\,(\eta_i, \eta_{i+1}) - \eta)^2} > \frac{M}{(\eta - \mathrm{Min}\,(\eta_i, \eta_{i+1}))^2},$$

also $\dfrac{d\,P(\eta)}{d\eta} > 0$, $P(\eta)$ monoton wachsend. Da $P(\dfrac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2}) \geqq 0$ ist, so ist $P(\eta) \geqq 0$ in $0 < \eta \leqq \dfrac{|\,b\,|}{2\,|\,a\,|} + \tfrac{1}{2}$. Nach Hilfssatz 5 wird der Bereich aus Hilfssatz 8 von den Bereichen $S(\xi_i, \eta_i)$, $S(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ lückenlos überdeckt und es ist Hilfssatz 8 bewiesen.

Da $\varrho > 0$ und $\dfrac{b}{a}\,\xi - \dfrac{b}{2\,a} + \tfrac{1}{2} \leqq \dfrac{|\,b\,|}{2\,|\,a\,|} + \tfrac{1}{2}$, so liegt der Bereich aus Satz 2 ganz im Bereich von Hilfssatz 8. Daher ist Satz 2 auch für den Fall III und somit vollständig bewiesen. Nach (5) folgt aus Satz 2:

Wenn $M \geqq \underset{i=0,1,\ldots,r}{\mathrm{Max}}\,\{\Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})]\}$, dann wird der Bereich

$$0 \leqq \xi \leqq |\,a\,|,\ \varrho < \eta \leqq \frac{b}{a}\,\xi - \frac{b}{2\,a} + \tfrac{1}{2}$$

von den Bereichen $S(0, 0)$, $S(\xi_i, \eta_i), \ldots, S(\xi_r, \eta_r)$, $S(|\,a\,|, -|\,b\,|)$ lückenlos überdeckt.

Daraus und aus Satz 1 folgt der Hauptsatz II.

§ 4. Vergleich dieser Schranken mit den Schranken von Heinhold.

Heinhold erhält in seiner Arbeit [2] (Seite 672) folgendes Ergebnis:

Zu zwei beliebigen Zahlen μ und ν gibt es stets Zahlen x und y mit $x = \mu \pmod 1$ und $y = \nu \pmod 1$, so daß

1. $|\,(1+l)\,x - (1-m)\,y\,|\,|\,(1-l)\,x + (1+m)\,y\,| \leqq \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Max}\,[(l+m)\,(2 - |\,m-l\,|),\ 1-l^2, 1-m^2]$ für $0 \leqq l \leqq 1$ und $0 \leqq m \leqq 1$,

2. $|(1+l)x-(1-m)y||(1+l)\ x+(1+m)y| \leqq \frac{(1+l)^2}{4}$, wobei $0 \leqq l \leqq m \leqq 1$.

Wir leiten nun nach unserer Methode Schranken für die Formen in 1. und 2. her.

Ist $l^2 + m^2 = 0$, dann ist

$$f(x, y) = (x + y)(x - y)$$

Durch die Transformation

$$x \to x - y,\ y \to x$$

geht $f(x, y)$ über in $(y - 2x)\, y$. Es ist (1) erfüllt. Wir wählen $k = \varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \frac{1}{4}$) und nehmen $n = 1$. Dann greifen wir die Gitterpunkte (0, 0), (1, 1), (2, 0) heraus. Es ist $\Phi[(0, 0), (1, 1)] = \Phi[(1, 1), (2, 0)] = \frac{1}{4}$, da beidemal Fall III vorliegt. Somit ist Max $(\varepsilon, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ Schranke der Form, was auch *Heinhold* bekommt.

ad 1. Ist $l = m = 1$, dann ist

$$f(x, y) = 4xy.$$

Aus Hauptsatz I ergibt sich $\varphi(0, 2, 0) = 1$ als beste Schranke. *Heinholds* Schranke ist in diesem Falle auch 1.

Ist $l = 1$, $0 \leqq m < 1$, dann ist

$$f(x, y) = -(1 - m^2)\left[y - \frac{2}{1 - m}\, x\right] y.$$

Wir betrachten die Form

$$\left(y - \frac{2}{1 - m}\, x\right) y,$$

für welche (1) erfüllt ist. Wir wählen $k = \varepsilon > 0$ (ε beliebig klein), nehmen $n = 1$ und greifen die Gitterpunkte (0, 0), (1, 1), $\left(\frac{2}{1 - m}, 0\right)$ heraus. Es ergibt sich dieselbe Schranke wie bei *Heinhold*. Der Fall $m = 1$, $0 \leqq l < 1$ ist analog.

Ist $0 \leqq l < 1$ und $0 \leqq m < 1$, so können wir annehmen, daß $l^2 + m^2 > 0$. Es sei zunächst $l \leqq m$. Durch die Transformation

$$x \to y,\ y \to x$$

und durch Division $1 - l^2$ erhält man die Form:

$$\left(y + \frac{1 + m}{1 - l}\, x\right)\left(y - \frac{1 - m}{1 + l}\, x\right),$$

für die (1) erfüllt ist. Wir wählen $k = \frac{|ab|}{4} = \frac{1-m^2}{4(1-l^2)}$, $n = 1$, betrachten die Gitterpunkte $(0, 0), (1, 1), (\frac{1+m}{1-l}, \frac{m-1}{1+l})$ und erhalten durch Anwendung unseres Verfahrens dieselbe Schranke wie *Heinhold*. Der Fall $l > m$ ist analog.

ad 2. Ist $l = m = 1$, dann ist

$$f(x, y) = 4x(x + y).$$

Durch die Transformation

$$x \to x,\ y \to -x + y$$

erhalten wir die Form $4xy$. Dieser Fall ist durch den Hauptsatz I (scharfe Schranke 1) erledigt.

Es sei zunächst $0 \leqq l = m < 1$. Dann haben wir die Form

$$[(1 + l)x - (1 - l)y](1 + l)(x + y).$$

Wir wenden die Transformation

$$x \to x,\quad y \to -x + y$$

an, dividieren durch $-(1 - l^2)$ und erhalten die Form

$$(y - \frac{2}{1-l}x)\,y,$$

für welche (1) erfüllt ist. Wir wählen $k = \varepsilon > 0$ (beliebig klein), $n = 1$, greifen die Gitterpunkte $(0, 0), (1, 1), (\frac{2}{1-l}, 0)$ heraus und erhalten dieselbe Schranke wie *Heinhold*.

Nun nehmen wir an, daß $0 \leqq l < m \leqq 1$. Wir wenden auf unsere Form

$$[(1 + l)x - (1 - m)y][(1 + l)x + (1 + m)y]$$

die Transformation $x \to y$, $y \to x$ an und dividieren durch $(1 + l)^2$. Dabei erhalten wir

$$(y + \frac{1+m}{1+l}x)(y - \frac{1-m}{1+l}x),$$

also (1) erfüllt. Wir wählen $k = \frac{|ab|}{4} = \frac{1-m^2}{4(1+l)^2}$, $n = 1$, betrachten die Gitterpunkte $(0, 0), (1, 1), (\frac{1+m}{1+l}, \frac{-(1-m)}{1+l})$ und erhalten zu-

nächst $\frac{1}{4}$ Max $[1-m^2, (1+l)^2, (m-l)(2+l-m)]$ als Schranke der gegebenen Form. Für $0 \leqq l \leqq m \leqq 1$ gilt:

$$0 \leqq (m-l)(2-m+l) \leqq (1+l)^2.$$

Somit ist

$$\frac{1}{4} \text{ Max } [1-m^2, (1+l)^2, (m+l)(2-m+l)] = \frac{(1+l)^2}{4},$$

welche Schranke auch *Heinhold* erhält.

Zusammenfassend sehen wir: Man kann stets k, n so wählen und solche Gitterpunkte herausgreifen, daß

$$\operatorname*{Max}_{i=0,1,\ldots,r} \{k, \Phi[(\xi_i, \eta_i), (\xi_{i+1}, \eta_{i+1})]\}$$

gleich der von *Heinhold* gefundenen Schranke wird. *Heinhold* [2] zeigt, daß seine Schranke mit Ausnahme jener Fälle, in denen die *Minkowski*sche Schranke bereits scharf ist, kleiner als die *Minkowski*sche Schranke ist.

§ 5. Numerische Auswertung der Ergebnisse für Formen von der Gestalt $x^2 - Dy^2$ [$D \equiv 2$ oder $3 \pmod 4$] und $x^2 + xy - \frac{D-1}{4} y^2$ [$D \equiv 1 \pmod 4$]

$D = 47$. Wir betrachten die Form $(y + \frac{x}{\sqrt{47}})(y - \frac{x}{\sqrt{47}})$ und nehmen $n = 4, k = \frac{5}{2.47}$. Wir wählen die Gitterpunkte aus:

$G_0 = (0,0), G_1 = \left(4 - \frac{27}{\sqrt{47}}, 4 + \frac{27}{\sqrt{47}}\right), G_2 = \left(\frac{21}{\sqrt{47}} - 3, -\frac{21}{\sqrt{47}} - 3\right),$

$G_3 = \left(3 - \frac{20}{\sqrt{47}}, 3 + \frac{20}{\sqrt{47}}\right), G_4 = \left(2 - \frac{13}{\sqrt{47}}, 2 + \frac{13}{\sqrt{47}}\right),$

$G_5 = \left(1 - \frac{6}{\sqrt{47}}, 1 + \frac{6}{\sqrt{47}}\right), G_6 = \left(\frac{1}{\sqrt{47}}, -\frac{1}{\sqrt{47}}\right)$ und erhalten $\frac{2.72}{47}$ als Schranke.

$D = 71$. Wir betrachten die Form $\left(y + \frac{x}{\sqrt{71}}\right)\left(y - \frac{x}{\sqrt{71}}\right)$ und nehmen $n = 4, k = \frac{9}{4.71}$. Wir wählen die Gitterpunkte aus: $G_0 = (0,0)$,

$G_1 = \left(1 - \frac{8}{\sqrt{71}}, 1 + \frac{8}{\sqrt{71}}\right), G_2 = \left(\frac{9}{\sqrt{71}} - 1, -\frac{9}{\sqrt{71}} - 1\right),$

$G_3 = \left(4 - \frac{33}{\sqrt{71}}, 4 + \frac{33}{\sqrt{71}}\right)$, $G_4 = \left(\frac{26}{\sqrt{71}} - 3, -\frac{26}{\sqrt{71}} - 3\right)$,
$G_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{71}}, \frac{-1}{\sqrt{71}}\right)$ und erhalten $\frac{2.33}{71}$ als Schranke.

$D = 79$. Wir betrachten die Form $\left(y + \frac{x}{\sqrt{79}}\right)\left(y - \frac{x}{\sqrt{79}}\right)$ und nehmen $n = 4$, $k = \frac{7}{2.79}$. Wir wählen die Gitterpunkte aus: $G_0 = (0, 0)$,
$G_1 = \left(\frac{36}{\sqrt{79}} - 4, -\frac{36}{\sqrt{79}} - 4\right)$, $G_2 = \left(4 - \frac{35}{\sqrt{79}}, 4 + \frac{35}{\sqrt{79}}\right)$,
$G_3 = \left(3 - \frac{26}{\sqrt{79}}, 3 + \frac{26}{\sqrt{79}}\right)$, $G_4 = \left(2 - \frac{17}{\sqrt{79}}, 2 + \frac{17}{\sqrt{79}}\right)$,
$G_5 = \left(1 - \frac{8}{\sqrt{79}}, 1 + \frac{8}{\sqrt{79}}\right)$, $G_6 = \left(\frac{1}{\sqrt{79}}, -\frac{1}{\sqrt{79}}\right)$ und erhalten $\frac{3.72}{79}$ als Schranke.

$D = 53$. Wir betrachten die Form $\left(y + \frac{2x}{1+\sqrt{53}}\right)\left(y + \frac{2x}{1-\sqrt{53}}\right)$ und nehmen $n = 25$, $k = \frac{5}{4.13}$. Wir wählen die Gitterpunkte aus:
$G_0 = (0, 0)$, $G_1 = \left(3 - \frac{24}{\sqrt{53}+1}, 3 + \frac{24}{\sqrt{53}-1}\right)$,
$G_2 = \left(25 - \frac{206}{\sqrt{53}+1}, 25 + \frac{206}{\sqrt{53}-1}\right)$, $G_3 = \left(18 - \frac{148}{\sqrt{53}+1}, 18 + \frac{148}{\sqrt{53}-1}\right)$,
$G_4 = \left(11 - \frac{90}{\sqrt{53}+1}, 11 + \frac{90}{\sqrt{53}-1}\right)$, $G_5 = \left(4 - \frac{32}{\sqrt{53}+1}, 4 + \frac{32}{\sqrt{53}-1}\right)$,
$G_6 = \left(\frac{26}{\sqrt{53}+1} - 3, -\frac{26}{\sqrt{53}-1} - 3\right)$, $G_7 = \left(\frac{18}{\sqrt{53}+1} - 2, \frac{-18}{\sqrt{53}-1} - 2\right)$,
$G_8 = \left(\frac{10}{\sqrt{53}+1} - 1, \frac{-10}{\sqrt{53}-1} - 1\right)$, $G_9 = \left(\frac{2}{\sqrt{53}+1}, \frac{-2}{\sqrt{53}-1}\right)$ und erhalten $\frac{1.495}{13}$ als Schranke.

$D = 85$. Wir betrachten die Form $\left(y + \frac{2x}{1+\sqrt{85}}\right)\left(y + \frac{2x}{1-\sqrt{85}}\right)$ und nehmen $n = 5$, $k = \frac{2}{21}$. Wir wählen die Gitterpunkte aus:

$$G_0 = (0, 0),\ G_1 = \left(1 - \frac{10}{\sqrt{85}+1}, 1 + \frac{10}{\sqrt{85}-1}\right),\ G_2 = \left(2 - \frac{20}{\sqrt{85}+1},\right.$$

$$\left. 2 + \frac{20}{\sqrt{85}-1}\right),\ G_3 = \left(3 - \frac{30}{\sqrt{85}+1}, 3 + \frac{30}{\sqrt{85}-1}\right),$$

$$G_4 = \left(4 - \frac{40}{\sqrt{85}+1}, 4 + \frac{40}{\sqrt{85}-1}\right),\ G_5 = \left(5 - \frac{50}{\sqrt{85}+1}, 5 + \frac{50}{\sqrt{85}-1}\right),$$

$$G_6 = \left(\frac{42}{\sqrt{85}+1} - 4, \frac{-42}{\sqrt{85}-1} - 4\right),\ G_7 = \left(\frac{32}{\sqrt{85}+1} - 3, \frac{-32}{\sqrt{85}-1} - 3\right),$$

$$G_8 = \left(\frac{22}{\sqrt{85}+1} - 2, \frac{-22}{\sqrt{85}-1} - 2\right),\ G_9 = \left(\frac{12}{\sqrt{85}+1} - 1, \frac{-12}{\sqrt{85}-1} - 1\right),$$

$$G_{10} = \left(\frac{2}{\sqrt{85}+1}, \frac{-2}{\sqrt{85}-1}\right) \text{ und erhalten } \frac{2.04}{21} \text{ als Schranke.}$$

Literatur.

[1] *Davenport:* „Non homogeneous binary quadratic forms". Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam, **49** (1946), 815—821.

[2] *Heinhold:* „Verallgemeinerung und Verschärfung eines *Minkowski*schen Satzes". Math. Z. **44** (1939), 659—688.

[3] *Inkeri:* „On the *Minkowski* constant in the theory of binary quadratic forms". Ann. Acad. Scient. Fennicae A. I., 66 (1950).

[4] *Minkowski:* „Diophantische Approximationen", Leipzig 1907, 42ff.

[5] *Steuerwald:* „Bemerkungen zu einer Arbeit von *J. Heinhold*". Math. Z. **52** (1950), 394—400.

[6] *Varnavides:* „Note on non-homogeneous quadratic forms". Quart. J. of Math. (Oxford) **19** (1948), 54—58.

On the Equation $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$.

By

L. J. Mordell, Cambridge (England).

(Received May 30, 1951.)

We owe to Legendre a proof of the famous

Theorem.

Let a, b, c be positive integers which are (i) square free, (ii) relatively prime in pairs. Then the equation

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 - cz^2 = 0 \tag{1}$$

has a solution in integers x, y, z, not all zero, if and only if, $-ab$ is a quadratic residue of c, bc of a and ca of b.

This means that integers A, B, C exist such that

$$bA^2 \equiv c \pmod{a}, \quad cB^2 \equiv a \pmod{b}, \quad aC^2 \equiv -b \pmod{c}. \tag{2}$$

The necessity of the condition (2) is obvious. We may suppose that x, y, z have no common factor. Since

$$by^2 - cz^2 \equiv 0 \pmod{a}, \tag{3}$$

from (*i*) and (1), neither y nor z is divisible by a and (2) follows. The sufficiency of the conditions (2) is the question that matters. *Holzer*[1] has recently proved that non-trivial solutions of (1) exist with

$$|x| < \sqrt{bc}, \quad |y| < \sqrt{ca}, \quad |z| < \sqrt{ab}, \tag{4}$$

except when $a = b = 1$. Then it is known that solutions exist with $z = 1$. In studying his paper, *I* have been led to a very simple proof of Legendre's theorem as an immediate consequence of the result that there exists an integer solution not (0, 0, 0) of the congruence

$$f(x, y, z) \equiv 0 \pmod{4abc} \tag{5}$$

with

[1] *L. Holzer.* „Minimal Solutions of Diophantine Equations". *Canadian Journal of Mathematics. Vol II,* (1950) 238—244.

$$|x| \leqq \sqrt{2bc}, \quad |y| < \sqrt{2ca}, \quad |z| < 2\sqrt{ab} \quad ; \tag{6}$$

and since then $|f(x, y, z)| < 4abc$, (1) follows. The proof holds also when a, b, c contain odd square factors provided that (*ii*) still holds. The bounds (6) are worse than (4) given by *Holzer*, but then my proof is much more elementary than his. It is of some interest that the bounds (6) just permit the solution of (1) to follow from (5).

Holzer proves that there exists an integer solution not (0, 0, 0) of the congruence

$$f(x, y, z) \equiv 0 \pmod{abc} \tag{7}$$

with

$$|x| < \sqrt{bc}, \quad |y| < \sqrt{ca}, \quad |z| < \sqrt{ab}, \tag{8}$$

provided $ab > 1$. This is obviously either a non-trivial solution of (1) or of

$$f(x, y, z) = abc. \tag{9}$$

In the latter case, he gives a method leading to a solution of (1) still subject to (8). I note that (9) when written as

$$f(X, Y, Z) = 0, \tag{10}$$

with

$$X = xz \pm by, \quad Y = yz \mp ax, \quad Z = z^2 + ab, \tag{11}$$

gives a solution of (1). On observing that if a prime p divides Z, the signs can be taken such that Y and so X are also divisible by p when a is square free, we can find a solution of (1) with the worse estimate than (6),

$$|x| \leqq 2\sqrt{bc}, \quad |y| \leqq 2\sqrt{ca}, \quad |z| \leqq 2\sqrt{ab}, \tag{12}$$

but there is no need to go into details.

It may be remarked that *Davenport*[2] and *Marshall Hall* have previously proved the existence of integers $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ such that $f(x,y,z) \equiv 0 \pmod{abc}$ and $|f(x, y, z)| < abc$, by using the methods of the geometry of numbers. They showed that it suffices to prove that every three dimensional lattice of determinant unity contains a point not the origin in the region $|x^2 + y^2 - z^2| < 1$.

§ 3. We require a lemma of a well known type, a variant of one used by *Holzer*,

---

[2] *H. Davenport* and *Marshall Hall*. „On the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$". *Quarterly Journal of Mathematics* Oxford Series. Vol. 19 (1948) 189–192.

Lemma: — *Let* $L_1, L_2, \ldots, L_n$ *be* n *homogeneous linear forms in* x, y, z *with integer coefficients. Let* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *be* n *positive integers and* r_1, r_2, r_3 *any positive numbers such that*

$$r_1 r_2 r_3 \geqq q_1 q_2 \cdots q_n. \tag{13}$$

Then the congruences

$$L_1 \equiv 0 \pmod{q_1},\ L_2 \equiv 0 \pmod{q_2},\ \ldots\ L_n \equiv 0 \pmod{q_n} \tag{14}$$

have a solution not (0, 0, 0) *such that*

$$|x| \leqq r_1,\ |y| < r_2,\ |z| < r_3. \tag{15}$$

For consider the sets of integers (x, y, z) lying in the intervals

$$0 \leqq x \leqq r_1,\quad 0 \leqq y < r_2,\quad 0 \leqq z < r_3. \tag{16}$$

Denote by $[r]$ the integer part of r and write $[r]^* = [r]$, r not an integer, and $[r]^* = r - 1$, r an integer.

There are

$$(1 + [r_1])\,(1 + [r_2]^*)\,(1 + [r_3]^*) > r_1 r_2 r_3$$

sets of integers (x, y, z) lying in the intervals (16). By (13), there are more than $q_1 q_2 \ldots q_n$ sets of residues for $L_1 \pmod{q_1}$, $L_2 \pmod{q_2}$, $\ldots$ $L_n \pmod{q_n}$, and so at least two different sets (x_1, y_1, z_1) and (x_2, y_2, z_2) have the same residue set. Clearly the differences

$$x = x_1 - x_2,\quad y = y_1 - y_2,\quad z = z_1 - z_2$$

are not all zero and satisfy (14) and (15).

We can also prove a similar result if the equality sign in (15) is transferred to $|y|$ or $|z|$.

§ 3. Suppose first a, b, c are all odd. To prove (5) and (6), we apply the lemma to five congruences of which the first three are

$$y - Az \equiv 0 \pmod{a},\ z - Bx \equiv 0 \pmod{b},\ x - Cy \equiv 0 \pmod{c}. \tag{17}$$

Then

$$by^2 - cz^2 \equiv b\,(y^2 - A^2 z^2) \equiv 0 \pmod{a},$$

etc, and so the solutions of (17) satisfy

$$f(x, y, z) \equiv 0 \pmod{abc}. \tag{18}$$

We wish now to satisfy

$$f(x, y, z) \equiv 0 \pmod{4} \tag{19}$$

by taking two linear congruences, each mod 2.

We note first that we cannot have $a \equiv b \equiv -c \pmod{4}$. For from (2), with *Jacobi*'s symbol of quadratic residuacity,

$$\left(\frac{-ab}{c}\right) = 1,\quad \left(\frac{bc}{a}\right) = 1,\quad \left(\frac{ca}{b}\right) = 1.$$

On multiplying the left hand sides,

$$\left(\frac{-1}{c}\right)\left\{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\right\}\left\{\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right)\right\}\left\{\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{c}\right)\right\}=1.$$

Now if $c\equiv 3 \pmod 4$, the first factor is -1, and the others are 1 by the law of quadratic reciprocity. If $c\equiv 1 \pmod 4$, the second factor is -1, and the others are 1. Hence we have a contradiction and so two of $a, b, -c$ are incongruent mod 4. If these are a, b, for instance, (and the procedure is obvious also for the other cases), then $a\equiv -b \pmod 4$ and (19) follows from

$$x\equiv y \pmod 2,\quad z\equiv 0 \pmod 2.$$

Hence on taking $r_1=\sqrt{2bc},\ r_2=\sqrt{2ca},\ r_3=2\sqrt{ab},$ we have (5) and (6).

Suppose next that one of a, b, c is even. Since the argument follows the same lines in all cases, we may suppose that a is even. We take now the three congruences

$$y-Az\equiv 0 \pmod{\tfrac{1}{2}a},\ z-Bx\equiv 0 \pmod b,\ x-Cy\equiv 0 \pmod c \quad (20)$$

The solutions of these make

$$f(x, y, z)\equiv 0 \pmod{\tfrac{1}{2}abc}. \quad (21)$$

We wish now to satisfy

$$f(x, y, z)\equiv 0 \pmod 8 \quad (22)$$

by taking two linear congruences one to mod 2 and the other to mod 4. We write $x\equiv \lambda y \pmod 2$, $z\equiv \mu y \pmod 4$, and seek λ and μ such that

$$a\lambda^2+b-c\mu^2\equiv 0 \pmod 8. \quad (23)$$

This we can do if $a+b-c\equiv 0 \pmod 8$ with $\lambda=\mu=1$, or if $b-c\equiv 0 \pmod 8$ with $\lambda=0,\ \mu=1$. Then of course (5) and (6) follow as before.

The remaining cases $b-c\equiv 4 \pmod 8$, $b-c\equiv a \pmod 8$ do not arise. For we have from (2),

$$\left(\frac{bc}{a/2}\right)=1,\quad \left(\frac{ca}{b}\right)=1,\quad \left(\frac{-ab}{c}\right)=1.$$

Multiplying these together, we can write

$$\left(\frac{-1}{c}\right)\left(\frac{2}{bc}\right)\left\{\left(\frac{a/2}{bc}\right)\left(\frac{bc}{a/2}\right)\right\}\left\{\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right)\right\}=1.$$

Suppose first that $b-c\equiv 4 \pmod 8$ and so $bc\equiv \pm 3 \pmod 8$.

If $b\equiv c\equiv 1 \pmod 4$, all the factors are 1 except $\left(\frac{2}{bc}\right)=-1$.

If $b \equiv c \equiv 3 \pmod 4$, all the factors are -1 except the third.

Take next $b-c \equiv a \pmod 8$ so that $b \equiv \pm 1 \pmod 4$, $c \equiv \mp 1 \pmod 4$.

If $a \equiv 2 \pmod 8$, the last two factors are 1, and $\left(\frac{-1}{c}\right)\left(\frac{2}{bc}\right) = -1$ since

$$b \equiv 3, 5, 7, 1 \pmod 8,$$
$$c \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8.$$

A similar contradiction arises when $a \equiv -2 \pmod 8$. Of course simple congruence considerations would show that the equation (1) is insoluble in cases such as above, but we are only assuming the conditions (2).

Die Einfachheit der alternierenden Gruppe.

Von

L. Rédei, Szeged (Ungarn).

(Eingelangt am 2. April 1951.)

Bezeichne A die alternierende Permutationsgruppe der Ziffern 1, ..., n. Folgender Beweis der Einfachheit von A für $n \geqq 5$ scheint besonders leicht zu sein[1].

Wir nehmen eine normale Untergruppe N ($\neq 1$) von A, dann haben wir $N = A$ zu beweisen. Stets bezeichnen ν, α Elemente von N bzw. A. Die $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ (n ausgenommen) bezeichnen verschiedene Ziffern 1, ..., n. Offenbar gehört der Kommutator

$$(\nu, \alpha) = \nu\alpha\,\nu^{-1}\alpha^{-1}$$

stets zu N.

I. N enthält ein Element $(a\,b)\,(c\,d)$. Zum Beweis betrachten wir die Tabelle:

	ν	α	(ν, α)
1.	$(a\,b\,c\,d\,\ldots)\,\ldots$	$(a\,b\,c)$	$(b\,c\,d)\,(b\,a\,c) = (a\,d\,b)$
2.	$(a\,b\,c)\,(d\,e\,\ldots)\,\ldots$	$(a\,b\,d)$	$(b\,c\,e)\,(b\,a\,d) = (a\,d\,c\,e\,b)$
3.	$(a\,b\,c)$	$(a\,b\,d)$	$(b\,c\,d)\,(b\,a\,d) = (a\,b)\,(c\,d)$
4.	$(a\,b)\,(c\,d)\,\ldots$	$(a\,b\,c)$	$(b\,a\,d)\,(b\,a\,c) = (a\,c)\,(b\,d)$

(Die auspunktierten Stellen können leer sein.) Es ist klar, daß es in N ein ν von einer der hier angegebenen vier Arten gibt. Für die Fälle 3, 4 enthält die Tabelle den direkten Beweis der Behauptung, Fall 2 wurde auf Fall 1, dieser auf Fall 3 zurückgeführt.

II. N enthält alle $(a\,b)\,(c\,d)$. Nach I darf nämlich angenommen werden, daß $\nu = (12)\ (3\,4)$ in N enthalten ist. Offenbar gibt es in A ein

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,\ldots\,n \\ a\,b\,c\,d\,\ldots \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,\ldots\,n \\ b\,a\,c\,d\,\ldots \end{pmatrix}.$$

[1] Vgl. *M. Bauer*, Über die alternierende Gruppe. Acta Sci. Math., 6 (1934), 222–223.

Für beide gilt

$$\alpha\, v\, \alpha^{-1} = (a\, b)\,(c\, d),$$

das beweist die Behauptung.

III. Aus

$$(r\, s)\,(r\, t) = (r\, s)\,(x\, y)\,.\,(x\, y)\,(r\, t)$$

folgt, daß A durch die $(a\, b)\,(c\, d)$ erzeugt wird. Dies und II beweisen $N = A$.

Zur Geometrie der dreigliedrigen Bewegungsvorgänge.

Von

Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 16. April 1951.)

Im Rastraum R', also in dem als ruhend angenommenen dreidimensionalen Euklidischen Raum wählen wir ein rechtwinkeliges Dreibein, das Rastkreuz $\{\mathfrak{o}'; \mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2', \mathfrak{e}_3'\}$. Der bewegliche Raum, der Gangraum R werde durch das Gangkreuz $\{\mathfrak{o}; \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ vertreten. Der Bewegungsvorgang, sowie die betrachteten geometrischen Gebilde mögen, dem Beispiele *Van der Woude*'s und *W. Blaschke*'s folgend, auf ein weiteres, gegenüber R und R' bewegliches Achsenkreuz, das Bezugskreuz $\{\mathfrak{p}; \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3\}$ bezogen werden. Die Änderungen, also die Differentiale von Vektorgrößen bezeichnen wir mit δ oder δ', je nachdem ob sie sich auf R oder R' beziehen, ein Beobachter also in R oder R' als ruhend angenommen wird.

Für die Änderungen der Einheitsvektoren $\mathfrak{r}_i$ des Bezugskreuzes ergeben sich wegen

$$(\mathfrak{r}_i\, \mathfrak{r}_j) = \delta_{ij} \tag{1}$$

schiefsymmetrische Ableitungsgleichungen

$$\delta\, \mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_j\, \omega_k - \mathfrak{r}_k\, \omega_j, \quad \delta'\, \mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i\, \omega_k' - \mathfrak{r}_k\, \omega_j'. \tag{2}$$

Im Falle eines dreigliedrigen Bewegungsvorganges sind hierbei die Koeffizienten ω_i, ω_i' *Pfaff*sche Formen in den drei Parametern u_1, u_2, u_3 unseres Bewegungsvorganges. Die drei Zeiger i, j, k mögen auch im folgenden immer die zyklischen Anordnungen 1, 2, 3,; 2, 3, 1; 3, 1, 2 durchlaufen.

Durch (2) wird lediglich der reine Drehungsanteil, der „verjüngte Drehvorgang" unseres dreigliedrigen Bewegungsvorganges beschrieben; der Schiebungsvorgang, die Schiebungskomponenten seien durch

$$\left.\begin{aligned}\overline{\omega} &= \delta\,\mathfrak{p} = \mathfrak{r}_1\,\overline{\omega}_1 + \mathfrak{r}_2\,\overline{\omega}_2 + \mathfrak{r}_3\,\overline{\omega}_3\\ \overline{\omega}' &= \delta'\mathfrak{p} = \mathfrak{r}_1\,\overline{\omega}_1' + \mathfrak{r}_2\,\overline{\omega}_2' + \mathfrak{r}_3\,\overline{\omega}_3'\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

erfaßt. Hierbei sei ein Aufpunkt O gewählt und der Vektor $\overrightarrow{Op} = \mathfrak{p}$ gesetzt.

Die Bewegung des Bezugskreuzes gegenüber R und R' und damit auch die Bewegung von R gegenüber R' wird also durch zweimal 6 *Pfaff*sche Formen $\omega_i, \overline{\omega}_i, \omega_i', \overline{\omega}_i'$ beschrieben, auf deren Differenzen es im wesentlichen nur ankommt. Sie sind nicht willkürlich, sondern müssen den Integrierbarkeitsbedingungen genügen. Unter Verwendung alternierender (polarer) Produkte, sowie äußerer Ableitungen von Differentialformen lauten diese:

$$d\omega_i = -[\omega_j\,\omega_k], \quad d\overline{\omega}_i = -[\overline{\omega}_j\,\omega_k] - [\omega_j\,\overline{\omega}_k]. \tag{4}$$

Für einen Punkt $\mathfrak{x}$ mit

$$\mathfrak{x} = \overrightarrow{O\mathfrak{x}} = \overrightarrow{Op} + \overrightarrow{p\mathfrak{x}} = \mathfrak{p} + \mathfrak{r}_1\,x_1 + \mathfrak{r}_2\,x_2 + \mathfrak{r}_3\,\mathfrak{r}_3 \tag{5}$$

ergibt sich wegen (2) und (3)

$$\left.\begin{aligned}\delta\mathfrak{x} &= \Sigma\,\mathfrak{r}_i\,(\overline{\omega}_i + dx_i - x_j\,\omega_k + x_k\,\omega_j) = \overline{\omega} + d\mathfrak{x} + \omega\times\mathfrak{x}\\ \delta'\mathfrak{x} &= \Sigma\,\mathfrak{r}_i\,(\overline{\omega}_i' + dx_i - x_j\,\omega_k' + x_k\,\omega_j') = \overline{\omega}' + d\mathfrak{x} + \omega'\times\mathfrak{x}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Hierbei sind

$$\omega = \mathfrak{r}_1\,\omega_1 + \mathfrak{r}_2\,\omega_2 + \mathfrak{r}_3\,\omega_3, \quad \omega' = \mathfrak{r}_1\,\omega_1' + \mathfrak{r}_2\,\omega_2' + \mathfrak{r}_3\,\omega_3' \tag{7}$$

*Pfaff*sche Drehvektoren und bedeutet

$$d\mathfrak{x} = \mathfrak{r}_1\,dx_1 + \mathfrak{r}_2\,dx_2 + \mathfrak{r}_3\,dx_3 \tag{8}$$

die Änderung des Punktes $\mathfrak{x}$ gegenüber dem Bezugskreuz.

Ist $\mathfrak{x}$ in R befestigt, also ruhend, so folgt aus der Rastbedingung $\delta\mathfrak{x} = 0$ für die Änderung der „Bahn" des Punktes $\mathfrak{x}$ in R'

$$\delta'\mathfrak{x} = \Sigma\,\mathfrak{r}_i\,(\overline{\psi}_i - x_j\,\psi_k + x_k\,\psi_j) = \overline{\psi} + \psi\times\mathfrak{x}, \tag{9}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\psi_i = \omega_i' - \omega_i, \quad \overline{\psi}_i = \overline{\omega}_i' - \overline{\omega}_i$$

$$\psi = \mathfrak{r}_1\psi_1 + \mathfrak{r}_2\psi_2 + \mathfrak{r}_3\psi_3 = \omega' - \omega, \ \overline{\psi} = \mathfrak{r}_1\overline{\psi}_1 + \mathfrak{r}_2\overline{\psi}_2 + \mathfrak{r}_3\overline{\psi}_3 = \overline{\omega}' - \overline{\omega}. \tag{10}$$

Die beiden Differentialvektoren $\psi, \overline{\psi}$ bestimmen die Momentanschraube $\{\psi, \overline{\psi}\}$; der Momentenvektor $\overline{\psi}$ ist hierbei auf den Punkt $\mathfrak{p}$ bezogen. Das zugehörige Gewinde besitzt die Gleichung

$$(\psi\overline{\mathfrak{g}}) + (\overline{\psi}\mathfrak{g}) = 0. \tag{11}$$

Bei Bezug auf den Aufpunkt O hätten wir $\overline{\psi}$ und $\overline{\mathfrak{g}}$ durch

$$\hat{\psi} = \overline{\psi} + \mathfrak{p} \times \psi \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}} + \mathfrak{p} \times \mathfrak{g} \tag{12}$$

zu ersetzen. Der Momentanschraube, wie dem zugehörigen Gewinde liegt hierbei die Vorstellung zugrunde, daß wir die Stelle u_1, u_2, u_3 unseres dreigliedrigen Bewegungsvorganges festhalten und eine Fortschreitungsrichtung $du_1 : du_2 : du_3$ wählen. Bei Variieren von $du_1 : du_2 : du_3$ erhalten wir in $\{\psi, \overline{\psi}\}$ ein „Bündel" von Schrauben, dem in (11) ein Gewindebündel (zweiparametrige, lineare Mannigfaltigkeit von Gewinden, Komplexnetz) entspricht.

Bisher spielten die Parameter u_i selbst keine Rolle: Unsere Darstellung ist somit invariant gegenüber Parametertransformationen. Nunmehr untersuchen wir noch, wie sich der Übergang zu einem anderen Bezugskreuz auswirkt. Der Zusammenhang zwischen den Dreibeinen $\{\mathfrak{p}; \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3\}$ und $\{\mathfrak{p}^*; \mathfrak{r}_1^*, \mathfrak{r}_2^*, \mathfrak{r}_3^*\}$ sei durch

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}_i^* &= \mathfrak{r}_1 a_{i1} + \mathfrak{r}_2 a_{i2} + \mathfrak{r}_3 a_{i3} \\ \overrightarrow{O\mathfrak{p}^*} = \mathfrak{p}^* &= \mathfrak{p} + \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{r}_1 b_1 + \mathfrak{r}_2 b_2 + \mathfrak{r}_3 b_3 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

gegeben, wobei die a_{ij} Elemente einer eigentlich orthogonalen Matrix $\mathfrak{A}$ sind. Ihre Zeilen faßten wir schon zu Vektoren zusammen

$$\mathfrak{r}_i^* = \mathfrak{a}_i = \mathfrak{r}_1 a_{i1} + \mathfrak{r}_2 a_{i2} + \mathfrak{r}_3 a_{i3}, \quad (\mathfrak{a}_i\, \mathfrak{a}_j) = \delta_{ij}. \tag{14}$$

Entsprechend den Ableitungsgleichungen (2) und (3) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \delta\, \mathfrak{r}_i^* = \mathfrak{r}_j^*\, \omega_k^* - \mathfrak{r}_k^*\, \omega_j^*, \quad \delta'\, \mathfrak{r}_i^* &= \mathfrak{r}_j^*\, \omega_k'^* - \mathfrak{r}_k^*\, \omega_j'^* \\ \overline{\omega}^* = \delta\mathfrak{p}^* = \mathfrak{r}_1^* \overline{\omega}_1^* + \mathfrak{r}_2^* \overline{\omega}_2^* + \mathfrak{r}_3^* \overline{\omega}_3^*, \quad \overline{\omega}'^* &= \delta'\mathfrak{p}^* = \mathfrak{r}_1^* \overline{\omega}_1'^* + \mathfrak{r}_2^* \overline{\omega}_2'^* + \mathfrak{r}_3^* \overline{\omega}_3'^* \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \omega_i^* &= \sum_p (a_{ip}\, \omega_p - a_{jp}\, d\, a_{kp}) = (\mathfrak{a}_i\, \omega) - (\mathfrak{a}_j\, d\, \mathfrak{a}_k) \\ \omega_i'^* &= \sum_p (a_{ip}\, \omega_p' - a_{jp}\, d\, a_{kp}) = (\mathfrak{a}_i\, \omega') - (\mathfrak{a}_j\, d\, \mathfrak{a}_k) \\ \overline{\omega}_p^* &= \sum a_{pi}\, (\overline{\omega}_i + d\, b_i - b_j\, \omega_k + b_k\, \omega_j) = (\mathfrak{a}_p, \overline{\omega} + d\mathfrak{b} + \omega \times \mathfrak{b}) \\ \overline{\omega}_p'^* &= \sum a_{pi}\, (\overline{\omega}_i' + d\, b_i - b_j\, \omega_k' + b_k\, \omega_j') = (\mathfrak{a}_p, \overline{\omega}' + d\mathfrak{b} + \omega' \times \mathfrak{b}) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Den Größen (10) entsprechen nun

$$\left.\begin{aligned} \psi_p^* &= \omega_p'^* - \omega_p^* = a_{p1}\, \psi_1 + a_{p2}\, \psi_2 + a_{p3}\, \psi_3 = (\mathfrak{a}_p\, \psi) \\ \overline{\psi}_p^* &= \overline{\omega}_p'^* - \overline{\omega}_p^* = \sum a_{pi}\, (\overline{\psi}_i - b_j\, \psi_k + b_k\, \psi_j) = (\mathfrak{a}_p\, \psi) + (\mathfrak{a}_p\, \psi\, \mathfrak{b}) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

In Matrizenschreibweise — die *Pfaff*schen Vektoren $\psi, \overline{\psi}$ usf. mögen hierzu als „Spaltenmatrizen" aufgefaßt werden — können wir für (17) auch schreiben

$$\psi^* = \mathfrak{A} \,.\, \psi, \quad \overline{\psi}^* = \mathfrak{A} \,.\, \overline{\psi} + \mathfrak{A} \,.\, (\psi \times \mathfrak{b}). \tag{18}$$

Wir vermerken

$$[\psi_1\,\psi_2\,\psi_3] = [\psi_1^*\,\psi_2^*\,\psi_3^*] \tag{19}$$

und wollen im folgenden immer

$$[\psi_1\,\psi_2\,\psi_3] \neq 0 \tag{20}$$

voraussetzen, also einen Bewegungsvorgang mit wesentlich dreigliedrigem verjüngten Drehvorgang betrachten.

$\psi_1, \psi_2\,\psi_3$ sind nun linear unabhängig und gestatten daher, die Differentialformen $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \overline{\psi}_3$ linear aufzubauen:

$$\overline{\psi}_p = c_{p1}\,\psi_1 + c_{p2}\,\psi_2 + c_{p3}\,\psi_3. \tag{21}$$

Für die Koeffizienten c_{pi} gilt nun

$$c_{pi} \cdot [\psi_1\,\psi_2\,\psi_3] = [\overline{\psi}_p\,\psi_j\,\psi_k]. \tag{22}$$

Der Übergang zum gestirnten Bezugskreuz zieht eine Transformation der c_{pq} nach sich, die wir nun ermitteln wollen. Es gelte

$$\overline{\psi}_p^* = c_{p1}^*\,\psi_1^* + c_{p2}^*\,\psi_2^* + c_{p3}^*\,\psi_3^*. \tag{23}$$

Mit Hilfe von Matrizen könnten wir (21) und (23) auch kurz schreiben:

$$\overline{\psi} = \mathfrak{C} \,.\, \psi, \quad \overline{\psi}^* = \mathfrak{C}^* \,.\, \psi^*. \tag{24}$$

Durch Einsetzen von (18) finden wir nun

$$\overline{\psi}^* = \mathfrak{C}^* \,.\, \mathfrak{A} \,.\, \psi = \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{C}\,\psi + \mathfrak{A} \,.\, (\psi \times \mathfrak{b}). \tag{25}$$

Statt des letzten Ausdruckes können wir auch schreiben

$$\mathfrak{A} \,.\, (\psi \times \mathfrak{b}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a}_3 \end{pmatrix} \,.\, (\psi \times \mathfrak{b}) = \begin{pmatrix} (\mathfrak{a}_1\,\psi\,\mathfrak{b}) \\ (\mathfrak{a}_2\,\psi\,\mathfrak{b}) \\ (\mathfrak{a}_3\,\psi\,\mathfrak{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{b} \times \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{b} \times \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{b} \times \mathfrak{a}_3 \end{pmatrix} \,.\, \psi = (\mathfrak{b} \times \mathfrak{A}) \,.\, \psi. \tag{26}$$

Somit erhalten wir

$$\mathfrak{C}^* \,.\, \mathfrak{A} \,.\, \psi = \{\, \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{C} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{A} \} \,.\, \psi \tag{27}$$

und daraus wegen (20), d. h. also wegen der besagten linearen Unabhängigkeit der ψ_i durch Koeffizientenvergleich

$$\mathfrak{C}^* \,.\, \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{C} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{A}. \tag{28}$$

Zwecks Auflösung nach $\mathfrak{C}^*$ multiplizieren wir von rechts mit der transponierten Matrix $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ und berücksichtigen die Orthogonalitätsbedingung

$$\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}' \,.\, \mathfrak{A} = \mathfrak{E}. \tag{29}$$

Somit wird schließlich

$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{C} \,.\, \mathfrak{A}' + (\mathfrak{b} \times \mathfrak{A}) \,.\, \mathfrak{A}'. \tag{30}$$

Ausführlichere Schreibweise des letzten Ausdruckes führt wieder zur Vereinfachung; hierbei seien jetzt in der Matrix $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ die Spalten hervorgehoben:

$$(\mathfrak{b}\times\mathfrak{A}).\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} \mathfrak{b}\times\mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{b}\times\mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{b}\times\mathfrak{a}_3 \end{pmatrix} . (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = \begin{pmatrix} 0 & +(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}) & -(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}) \\ -(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}) & 0 & +(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}) \\ +(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}) & -(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Kehren wir wiederum zu den Elementen zurück, so hat die gesuchte Transformation die Gestalt:

$$c_{ij}^* = \sum_{p,q} a_{ip}\, c_{pq}\, a_{jq} + \sum_{p} a_{kp}\, b_p \quad (32)$$

$$c_{ji}^* = \sum_{p,q} a_{ip}\, c_{qp}\, a_{iq} - \sum_{p} a_{kp}\, b_p \quad (33)$$

$$c_{ii}^* = \sum_{p,q} a_{ip}\, c_{pq}\, a_{iq} \quad (34)$$

Hierbei ist zu beachten, daß i, j, k zyklische Anordnungen von 1, 2, 3 sind.

Durch besondere Wahl des Bezugskreuzes wollen wir nun die Gestalt der Matrix $\mathfrak{C}$ von (21) vereinfachen. Wir wollen zeigen, daß es im allgemeinen Fall zu jeder Stelle das Bewegungsvorganges ein Bezugskreuz gibt, für das die Matrix $\mathfrak{C}$ *Diagonalgestalt* annimmt. Dieses Bezugskreuz wollen wir *kanonisch* nennen.

Hierzu müssen wir nachweisen, daß die orthogonale Matrix $\mathfrak{A}$, sowie der Schiebvektor $\mathfrak{b}$ im allgemeinen eindeutig so bestimmt werden können, daß für $p \neq q$

$$c_{pq}^* = 0 \quad (35)$$

ausfällt. — Durch Addition von (32) und (33) ergibt sich

$$c_{ij}^* + c_{ji}^* = \sum_{p,q} a_{ip}\,(c_{pq} + c_{qp})\, a_{jq} \quad (36)$$

oder kürzer in Matrizen

$$\mathfrak{C}^* + \mathfrak{C}^{*\prime} = \mathfrak{A} \,.\, (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}') \,.\, \mathfrak{A}'. \quad (37)$$

Wir wollen erst einmal annehmen, daß die charakteristische Gleichung der symmetrischen Matrix $\mathfrak{C} + \mathfrak{C}'$ lauter verschiedene Wurzeln (Eigenwerte) besitze. Dann können wir immer im wesentlichen eindeutig die Hauptachsentransformation ausführen, d. h. die orthogonale Matrix so bestimmen, daß $\mathfrak{C}^* + \mathfrak{C}^{*\prime}$ Diagonalgestalt besitzt, also für $p \neq q$

$$c_{pq}^* + c_{qp}^* = 0 \quad (38)$$

gilt. Nun haben wir nur noch über den Vektor $\mathfrak{b}$ so zu verfügen, daß sogar (35) gilt. Dies bedeutet aber nach (32) und (33) die Auflösung eines

Systems linearer, inhomogener Gleichungen mit $\mathfrak{A}$ als Koeffizientenmatrix:

$$\sum_p a_{kp}\, b_p = +\sum_{p,q} a_{ip}\, c_{qp}\, a_{jq} = -\sum_{p,q} a_{ip}\, c_{pq}\, a_{jq}. \tag{39}$$

Die Lösungen selbst besitzen die Gestalt

$$b_n = +\Sigma\, a_{kn}\, a_{ip}\, c_{qp}\, a_{jq} = -\Sigma\, a_{kn}\, a_{ip}\, c_{pq}\, a_{jq}. \tag{40}$$

Die Summe der Elemente der Hauptdiagonale von $\mathfrak{C}$ ist als halbe Spur der symmetrischen Matrix $\mathfrak{C} + \mathfrak{C}'$ eine Invariante:

$$c_{11} + c_{22} + c_{33} = c_{11}^* + c_{22}^* + c_{33}^*. \tag{41}$$

Denken wir uns nun das kanonische Bezugskreuz eingeführt, die Sterne wiederum weggelassen und kurz $c_{ii} = c_i$ gesetzt, so nimmt das System (21) die einfache Form an:

$$\overline{\psi}_i = c_i\, \psi_i. \tag{42}$$

Nun wollen wir die geometrische Bedeutung dieses kanonischen Bezugskreuzes kennen lernen und damit gleichzeitig einige geometrische Eigenschaften dreigliedriger Bewegungsvorgänge feststellen.

Die Änderung eines im Gangraum R befestigten Punktes $\mathfrak{x}$ war durch (9) gegeben; daraus finden wir das Volumselement dV, das beim dreigliedrigen Bewegungsvorgang vom Punkte $\mathfrak{x}$ im Rastraum R' beschrieben wird:

$$dV = [(\overline{\psi}_1 - x_2\psi_3 + x_3\psi_2) \cdot (\overline{\psi}_2 - x_3\psi_1 + x_1\psi_3) \cdot (\overline{\psi}_3 - x_1\psi_2 + x_2\psi_1)]. \tag{43}$$

Führen wir die alternierenden Produkte näher aus und berücksichtigen das kanonische Bezugskreuz, d. h. setzen (42) ein, so finden wir

$$\left.\begin{aligned} dV &= [\overline{\psi}_1\, \overline{\psi}_2\, \overline{\psi}_3] + \Sigma\, x_i \{[\overline{\psi}_i\, \psi_j\, \overline{\psi}_j] + [\overline{\psi}_i\, \psi_k\, \overline{\psi}_k]\} + \\ &\quad + \Sigma\, x_i\, x_j \{[\psi_k\, \psi_i\, \overline{\psi}_i] - [\psi_k\, \psi_j\, \overline{\psi}_j]\} + \Sigma\, x_i^2\, [\overline{\psi}_i\, \psi_j\, \psi_k], \\ dV &= \{c_1\, x_1^2 + c_2\, x_2^2 + c_3\, x_3^2 + c_1\, c_2\, c_3\}\, [\psi_1\, \psi_2\, \psi_3]. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Alle Punkte $\mathfrak{x}$ des Gangraumes R, die an der betrachteten Stelle des dreigliedrigen Bewegungsvorganges gleiche Volumselemente dV beschreiben, erfüllen somit eine Quadrik, deren Hauptachsen das kanonische Bezugskreuz bilden. Für verschiedene Werte von dV ergeben sich ähnliche und ähnlich gelegene Quadriken.

Im besonderen liegen die Punkte $\mathfrak{x}$ von R, die im Augenblick eine Fläche beschreiben, für die also das Volumselement dV verschwindet, auf einer Quadrik mit der Gleichung

$$c_1\, x_1^2 + c_2\, x_2^2 + c_3\, x_3^2 + c_1\, c_2\, c_3 = 0. \tag{45}$$

Diese Fläche und damit auch das kanonische Bezugskreuz können jedoch auch noch in anderer Weise gekennzeichnet werden: Wir hatten

schon vermerkt, daß bei veränderlichem $du_1 : du_2 : du_3$ durch die Gleichung (11) ein Bündel von Gewinden, zugehörig zum Bündel der Momentanschrauben erfaßt wird. Die gemeinsamen Strahlen dieses Gewindebündels bilden einen *Regulus*; er besteht also aus den Geraden $\{\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}\}$, deren Momente zu allen möglichen Momentanschrauben $\{\psi, \bar{\psi}\}$ verschwinden. Um eine von den du_i freie Darstellung dieses Regulus zu bekommen, multiplizieren wir (11) oder ausführlicher

$$\sum_i (\psi_i \bar{g}_i + \bar{\psi}_i g_i) = 0 \tag{46}$$

der Reihe nach mit $[\psi_2 \psi_3]$, $[\psi_3 \psi_1]$, $[\psi_1 \psi_2]$ bei alternierender Produktbildung. Wir erhalten so für den Regulus drei lineare Gleichungen in den *Plückers*chen Geradenzeigern

$$\left.\begin{aligned} \sum_i g_i [\bar{\psi}_i \psi_2 \psi_3] + \bar{g}_1 [\psi_1 \psi_2 \psi_3] &= 0 \\ \sum_i g_i [\bar{\psi}_i \psi_3 \psi_1] + \bar{g}_2 [\psi_1 \psi_2 \psi_3] &= 0 \\ \sum_i g_i [\bar{\psi}_i \psi_1 \psi_2] + \bar{g}_3 [\psi_1 \psi_2 \psi_3] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Für das kanonische Achsensystem vereinfachen sich diese drei Bestimmungsgleichungen des Regulus:

$$c_i g_i + \bar{g}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{48}$$

Ein Punkt $\mathfrak{x}$ liegt auf der Geraden $\{\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}\}$, wenn

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{g} \tag{49}$$

oder

$$\bar{g}_i = x_j g_k - x_k g_j \tag{50}$$

gilt. Fragen wir daher nach allen Punkten $\mathfrak{x}$ des Gangraumes R, durch die ein gemeinsamer Strahl des Gewindebündels $\{\psi, \bar{\psi}\}$ geht, die also auf obigem Regulus liegen, so haben wir nur (50) in (48) einzusetzen, was

$$c_i g_i + x_j g_k - x_k g_j = 0 \tag{51}$$

ergibt. Nun eliminieren wir die g_i, d. h. ordnen die drei Gleichungen (51) und setzen die Koeffizientendeterminante gleich Null.

$$\begin{vmatrix} c_1 & -x_3 & +x_2 \\ +x_3 & c_2 & -x_1 \\ -x_2 & +x_1 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + c_1 c_2 c_3 = 0 \tag{52}$$

An jeder Stelle eines dreigliedrigen Bewegungsvorganges trägt somit die Quadrik der flächenläufigen Punkte des Gangraumes den Regulus

aller Strahlen, deren Momente bezüglich des Bündels der Momentanschrauben verschwinden[1].

Setzen wir (49) gleich in (11) ein, so ergibt sich wegen (9)

$$(\psi\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{g}) + (\overline{\psi}\, \mathfrak{g}) = ((\overline{\psi} + \psi \times \mathfrak{x})\, \mathfrak{g}) = (\delta'\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{g}) = 0. \tag{53}$$

Daraus kann auch geschlossen werden, daß die Gerade $\mathfrak{g}$ senkrecht zur Fortschreitungsrichtung von $\mathfrak{x}$ steht, sich ein solcher Punkt $\mathfrak{x}$ also nur in einer Ebene für den Augenblick fortbewegen kann.

In dualer Weise vorgehend, befestigen wir nun im Gangraum eine Ebene $\mathfrak{E}$. Ihr Normalenvektor sei

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{r}_1 v_1 + \mathfrak{r}_2 v_2 + \mathfrak{r}_3 v_3, \quad (\mathfrak{v}\, \mathfrak{v}) = \Sigma v_i^2 = 1, \tag{54}$$

ihre Gleichung im Bezugskreuz

$$(\mathfrak{v}\, \mathfrak{x}) + v_0 = 0. \tag{55}$$

Bei unserem Bewegungsvorgang wird eine dreigliedrige Ebenenschar (gesamte Ebenenraum oder ein Teilbereich) durchlaufen, der die Ebenendichte dE zukommt. Wir finden hierfür leicht den Ausdruck[2]

$$dE = \Sigma v_i^2 [\overline{\psi}_i \psi_j \psi_k] + \Sigma v_i v_j \{[\psi_k \psi_i \overline{\psi}_i] - [\psi_k \psi_j \overline{\psi}_j]\} = [\psi_1 \psi_2 \psi_3] \,.\, \Sigma c_i v_i^2. \tag{56}$$

Alle ∞^2 Ebenen $\mathfrak{E}$ des Gangraumes R, die an der betrachteten Stelle des dreigliedrigen Bewegungsvorganges zur gleichen Ebenendichte dE führen, sind somit normal zu den Erzeugenden eines Kegels zweiter Ordnung, dessen Achsen die Richtungen $\mathfrak{r}_i$ des kanonischen Dreibeins ergeben.

Im Sonderfall der Ebenen mit verschwindender Ebenendichte dE erhalten wir den Richtkegel des früher betrachteten Regulus (48). — Die Frage nach den Ebenen, die einen gemeinsamen Strahl des Gewindebündels $\{\psi, \overline{\psi}\}$ enthalten, liefert natürlich die Mannigfaltigkeit der Tangentialebenen der Quadrik (45).

Bisher haben wir festgestellt: Unter der Annahme der Verschiedenheit der drei Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{C} + \mathfrak{C}'$ wird das kanonische Drei-

---

[1] Die Bahnen der flächenläufigen Punkte werden auch als *Grenzflächen* bezeichnet. Die Punkte selbst wurden von *H. J. E. Beth* dadurch charakterisiert, daß sie auf jenen Geraden liegen, welche die Achsen aller Momentandrehungen schneiden. Diese Kennzeichnung ist in unserer allgemeineren enthalten, da ja die Elementardrehungen dem Bündel der Momentanschrauben angehören, aus dem zugehörigen Gewindebündel, also nur die ausgearteten Gewinde herausgegriffen wurden. Vgl. die Hinweise bei *K. Federhofer*, Graphische Kinematik und Kinetostatik (Ergebn. d. Math. u. Grenzgeb.), Berlin-Springer 1932, S. 60.

[2] Vgl. *W. Blaschke*, Vorl. ü. Integralgeometrie II (Hamburger Math. Einzelschriften), Leipzig-Berlin, Teubner, 1936.

bein im wesentlichen von den drei zugehörigen Eigenvektoren (vom Betrage 1) gebildet, wobei der Ursprung eindeutig bestimmt ist. Es bleiben nun noch einige Sonderfälle zu untersuchen:

1. *Besitzt die charakteristische Gleichung eine einfache und eine Doppelwurzel, so ist das kanonische Bezugskreuz nur bis auf Drehungen um jenen Eigenvektor bestimmt, der der einfachen Wurzel entspricht; die Quadrik (45) ist eine Drehfläche.*

Wir können in diesem Fall für die Doppelwurzel der charakteristischen Gleichung $c_{11}^* = c_{22}^*$ annehmen und eine orthogonale Matrix $\mathfrak{A}$ der Eigenschaft (37) durch

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D} \,.\, \mathfrak{A} \tag{57}$$

ersetzen, wobei etwa

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{58}$$

für beliebigen Drehwinkel α gilt. Nach (39), (40) wurde zur Matrix $\mathfrak{A}$ der Vektor $\mathfrak{b}$ ermittelt. In gleicher Weise kann man sich auch zu $\hat{\mathfrak{A}}$ den zugehörigen Schiebvektor $\hat{\mathfrak{b}}$ und damit den Ursprung des kanonischen Dreibeins gefunden denken. Ersetzt man nun in (30) $\mathfrak{A}$ durch $\hat{\mathfrak{A}}$ und berücksichtigt

$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{D} \,.\, \mathfrak{C}^* \,.\, \mathfrak{D}', \tag{59}$$

so folgert man leicht

$$\mathfrak{D} \,.\, (\mathfrak{b} \times \mathfrak{A}) = (\mathfrak{b} \times \mathfrak{D} \,.\, \mathfrak{A}) \tag{60}$$

und daraus schließlich wegen (31)

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}. \tag{61}$$

Hiermit hat man direkt bestätigt ohne auf die Quadrik der flächenläufigen Punkte oder andere geometrische Deutungen zurückzugreifen, daß auch in diesem Fall der Ursprung des kanonischen Dreibeins eindeutig festgelegt ist.

2. Für eine dreifache Wurzel $c_{ii}^* = c$ der charakteristischen Gleichung kann für obige Matrix $\mathfrak{D}$ eine beliebige orthogonale Matrix gewählt werden; nur der Ursprung des sonst unbestimmten kanonischen Bezugskreuzes ist festgelegt.

3. Der ausgeartete Fall einer verschwindenden Wurzel der charakteristischen Gleichung kann geometrisch durch die Frage nach *kurven-*

läufigen Punkten erhalten werden, d. h. also nach Punkten des Gangraumes, die im Augenblick eine Kurve beschreiben. Die Matrix $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}'$ ist nun singulär (Rang = 2); an der im wesentlichen eindeutigen Ermittlung der orthogonalen Matrix $\mathfrak{A}$ und des Schiebvektors $\mathfrak{b}$ ändert sich jedoch nichts gegenüber dem allgemeinen Fall. Die Quadrik der flächenhäufigen Punkte artet in ein Ebenenpaar mit der Gleichung

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = 0 \tag{62}$$

aus, der früher betrachtete Regulus zerfällt in zwei Strahlbüschel jeweils in einer dieser Ebenen. Die Scheitel der Strahlbüschel liegen auf der Schnittgeraden beider Ebenen und haben die Koordinaten

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = \pm\sqrt{-c_1 c_2}. \tag{63}$$

Aus (9) und (42) berechnen wir nun für dieses kanonische Bezugskreuz das *vektorielle Flächenelement* eines im Gangraum befestigten Punktes $\mathfrak{x}$:

$$d\mathfrak{F} = \tfrac{1}{2}[\delta'\mathfrak{x}\times\delta'\mathfrak{x}] = \Sigma\,\mathfrak{r}_i\{(x_i^2 + c_j c_k)[\psi_j\psi_k] + \\ + (x_i x_j + c_k x_k)[\psi_k\psi_i] + (x_i x_k - c_j x_j)[\psi_i\psi_j]\}. \tag{64}$$

Wegen (20) sind auch $[\psi_1\psi_2], [\psi_2\psi_3], [\psi_3\psi_1]$ linear unabhängig; ein Verschwinden von $d\mathfrak{F}$ führt somit zu

$$x_i^2 + c_j c_k = 0, \quad x_i x_j + c_k x_k = 0, \quad x_k x_i - c_j x_j = 0. \tag{65}$$

Diese Bedingungen sind aber gleichwertig mit

$$x_i^2 + c_j c_k = 0, \quad x_i x_j = 0, \quad c_i x_i = 0 \tag{66}$$

und gestatten die Lösungen

$$x_i = x_j = 0, \quad x_k = \pm\sqrt{-c_i c_j}, \tag{67}$$

wenn nur $c_k = 0$ ist. — Da in unserem Sonderfall $c_3 = 0$ gilt, gibt es tatsächlich kurvenläufige Punkte, und zwar die beiden Punkte (63). — Fordern wir umgekehrt von einem dreigliedrigen Bewegungsvorgang das Vorhandensein von Punkten, die im Augenblick eine Kurve durchlaufen, so werden wir auf das Verschwinden eines der drei Eigenwerte geführt. Diese kurvenläufigen Punkte sind nach früherem durch die Eigenschaft gekennzeichnet, ein Büschel von gemeinsamen Strahlen des Gewindebündels $\{\psi, \overline{\psi}\}$ zu enthalten. Die Forderung, daß die Matrix (52) den Rang 1 besitze, deckt sich nämlich mit dem System (65).

Natürliche Geometrie der Mindingschen Verbiegungen der Strahlflächen.

Von

Erwin Kruppa, Wien.

(Eingelangt am 21. Mai 1951.)

In meinem Aufsatz „*Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven*" (Stzber. Öst. Ak. d. Wiss. Wien, math.-nat. Kl., Abt. IIa, 157 (1949) habe ich eine natürliche Geometrie der Strahlflächen (= Regelflächen) entwickelt, die sich dadurch auszeichnet, daß sie die Theorie der Raumkurven in ganz besonders einfacher Weise als Sonderfall der Theorie der Strahlflächen erscheinen läßt. Die sich daraus ergebenden, zum Teil bisher noch nicht bemerkten Zusammenhänge zwischen Strahlflächen und Raumkurven auszubauen, war der Gegenstand dieser Arbeit und zweier weiterer: „*Strahlflächen als Verallgemeinerungen der Cesàro-Kurven*", Monatsh. f. Math. 52 (1948) und „*Das Analogon zu einem Satz von Cesàro über Bertrand-Kurven im Bereich der Strahlflächen*", ebenda 54 (1950).

Es soll nun gezeigt werden, daß die in der zuerst genannten Arbeit[1] entwickelte Theorie der Strahlflächen auch zur Behandlung der *Minding*schen Verbiegungen der Strahlflächen besonders geeignet ist. Bereits *X. Antomari* (Thèse, Paris 1894) hat eine natürliche Geometrei der Strahlflächen und ihrer *Minding*schen Verbiegungen angedeutet, doch ist die von ihm getroffene Auswahl der zugrundegelegten Bewegungsinvarianten und des invarianten Parameters nicht die beste.

Das Rechtssystem $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$ der Einsvektoren der Erzeugenden, der Zentralnormalen und der Zentraltangente ist das begleitende Dreibein der Erzeugenden $e(u)$, die wir uns in Abhängigkeit von der Bogenlänge u auf der Striktionslinie vorstellen. Werden $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{z}$ als Punkte der Einheitskugel gedeutet und sind u_1 und u_3 die Bogenlängen auf den sphärischen Bildern von $\mathfrak{e}(u)$ und $\mathfrak{z}(u)$, so kann man wie in der Kurven-

[1] Sie wird im Folgenden unter „a. a. O." zitiert.

theorie $\varkappa = du_1 : du$ als *Krümmung* und $\varkappa_1 = du_3 : du$ als *Torsion* der Strahlfläche in $e\,(u)$ bezeichnen. Ist ferner $\mathfrak{t}\,(u)$ der Tangentenvektor der Striktionslinie, so ist $\sphericalangle\, \mathfrak{e}\, \mathfrak{t} = \sigma\,(u)$ die *Striktion* von e.

$\varkappa, \varkappa_1, \sigma$ als Funktionen der Bogenlängen u der Striktionslinie können einer natürlichen Geometrie der Strahlflächen zugrunde gelegt werden, in der sämtliche Begriffe und Lehrsätze koordinatenfrei durch $\varkappa, \varkappa_1, \sigma$ und deren Ableitungen ausgedrückt werden. Ist $\mathfrak{s}\,(u)$ der Ortsvektor nach den Punkten der Striktionslinie, so ist die Strahlfläche Φ durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{s}\,(u) + v\,\mathfrak{e}\,(u) \tag{1}$$

darstellbar. Für den oben erklärten Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ gilt $\mathfrak{t} = \mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma$, so daß statt (1)

$$\mathfrak{x} = \int (\mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma)\,du + v\,\mathfrak{e}\,(u) \tag{2}$$

geschrieben werden kann. Die Ableitungsgleichungen für $\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z}$

$$\dot{\mathfrak{e}} = \varkappa\,\mathfrak{n},\quad \dot{\mathfrak{n}} = -\varkappa\,\mathfrak{e} + \varkappa_1\,\mathfrak{z},\quad \dot{\mathfrak{z}} = -\varkappa_1\,\mathfrak{n} \tag{3}$$

stimmen formal mit den *Frenet*schen Formeln der Kurventheorie überein und sind für $\sigma = 0$, d. h. wenn die Strahlfläche die Tangentenfläche einer Raumkurve ist, mit diesen identisch.

Orientiert man eine Erzeugende e und ihre Zentralnormale n, so ist für alle Erzeugenden einer Umgebung von e das begleitende Dreibein $\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z}$ bestimmt. Damit hat Φ eine „*Orientierung*" erhalten. $\varkappa$ ist der gewählten Orientierung entsprechend entweder positiv oder negativ. Dagegen ist $\varkappa_1$ von der Orientierung unabhängig. Es ist zweckmäßig, die Striktion auf das Intervall $-\pi/2 < \sigma \leqq \pi/2$ zu beschränken. Über die Bedeutung der Umkehrung von Vorzeichen der $\varkappa, \varkappa_1, \sigma$ ist folgendes zu sagen: Die Strahlflächen $(\varkappa, \varkappa_1, \sigma)$ und $(-\varkappa, \varkappa_1, -\sigma)$ sind nicht verschieden, sondern nur verschieden orientiert. Die Strahlfläche $(\varkappa, -\varkappa_1, -\sigma)$ (d. i. auch $(-\varkappa, -\varkappa_1, \sigma)$) ist zur Strahlfläche $(\varkappa, \varkappa_1, \sigma)$ gegensinnig kongruent. Dagegen sind die Flächen $\Phi_1\,(+\varkappa, \varkappa_1, \mp\sigma)$ und $\Phi_2\,(\pm\varkappa, -\varkappa_1, \pm\sigma)$, wobei je nach der Orientierung entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten, von $\Phi\,(\varkappa, \varkappa_1, \sigma)$ wesentlich verschieden.

Man spricht von einer *Mindingschen Verbiegung*[1] einer Strahlfläche Φ, wenn sie sich auf eine andere Φ^* derart isometrisch abbilden läßt, daß die Erzeugenden von Φ in die Erzeugenden von Φ^* übergehen. Φ^* ist dann eine *Mindingsche Biegungsfläche* von Φ. Vom trivialen Fall einer

[1] *S. F. Minding*, J. f. Math. 18 (1936), S. 297.

Isometrie durch eine gleich- oder gegensinnig kongruente Transformation wird abgesehen[1].

Nach (2) und (3) findet man für das Quadrat des Bogendifferentials einer Kurve auf Φ

$$ds^2 = (1 + v^2 \varkappa^2)\, du^2 + 2 \cos\sigma\, du\, dv + dv^2. \tag{4}$$

ds^2 ist nach (4) unabhängig von $\varkappa_1$ und unempfindlich gegen die Änderungen der Vorzeichen von $\varkappa$ und σ. Daraus folgt, daß jede Ersetzung von $\varkappa_1$ durch eine andere Funktion $\varkappa_1^*$, sowie auch die Umkehrung des Vorzeichens von $\varkappa$ oder σ, eine *Minding*sche Verbiegung von $\Phi(\varkappa, \varkappa_1, \sigma)$ in $\Phi^*_{1,2}(\varkappa, \varkappa_1^*, \pm\sigma)$ ist.

Die allgemeinsten Gleichungen zur Abbildung einer Strahlfläche Φ auf eine andere Φ^*, wobei die Erzeugenden von Φ kongruent in die Erzeugenden von Φ^* übergeführt werden, lauten $u = \varphi(u^*)$, $v = v^* + \psi(u^*)$. Unterwirft man sie noch der Bedingung, daß durch sie (4) invariant bleiben soll, so ergibt sich $u = u^*$, $v = v^*$. Daraus folgt:

Man erhält alle Mindingschen Biegungsflächen von $\Phi(\varkappa, \varkappa_1, \sigma)$ durch die beiden folgenden, voneinander unabhängigen Operationen: 1. Ersetzung von $\varkappa_1$ durch eine beliebige andere Funktion $\varkappa_1^*$, 2. Umkehrung des Vorzeichens von $\varkappa$ oder σ.

Demnach sind $|\varkappa|$ und $|\sigma|$ Invarianten der *Minding*schen Biegungen. Da aus $v = 0$ auch $v^* = 0$ folgt, sind die Striktionslinien stets zugeordnete Kurven bei allen *Minding*schen Biegungen.

Innerhalb der auf $\varkappa, \varkappa_1, \sigma$ gegründeten natürlichen Geometrie der Strahlflächen lassen sich die Probleme der *Minding*schen Biegung überaus einheitlich behandeln. Sie lassen sich dabei in zwei Gattungen einteilen. A: Probleme, deren Lösung nur auf der Invarianz von $|\varkappa|$ und $|\sigma|$ beruhen; B: Probleme, die auch die Berechnung der Torsion $\varkappa_1^*$ der Biegungsfläche Φ^* erfordern.

Beispiele zu A: Bei einer Mindingschen Biegung bleiben dem Betrage nach invariant a) der Drall p, b) der polare Krümmungsradius r, c) die geodätische Krümmung K_g der Striktionslinie.

Dies folgt unmittelbar aus den Formeln $p\varkappa = \sin\sigma$ (a. a. O., § 1 (11), $r\varkappa = \cos\sigma$ (a. a. O., S. 151) $K_g = \dot{\sigma}$ (a. a. O., § 2 (5).

Von *E. Laguerre* stammt der folgende Satz:[2] *Wenn eine Strahlfläche*

[1] Eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der *Mindings*chen Biegungen in koordinatengeometrischer Behandlung bei *G. Darboux*, III. Bd. (1894), S. 293—316.

[2] Bull. Sc. math. II (1871), S. 279.

durch eine Mindingsche Biegung in ein Drehhyperboloid überführbar ist, so ist ihre Striktionslinie eine Bertrand-Kurve.

Beweis: Da bei einem Drehhyperboloid $\varkappa$ und σ konstant sind, gilt dies auch für die *Minding*schen Biegungsflächen und der Satz ist daher eine unmittelbare Folge des Satzes (a. a. O., § 2, Satz 7): Die Striktionslinie einer Strahlfläche mit $\varkappa = \text{const}$ und $\sigma = \text{const}$ ist eine *Bertrand*-Kurve.

Beispiele zu B: *Eine windschiefe Strahlfläche Φ soll durch eine Mindingsche Biegung in eine Strahlfläche Φ^* so übergeführt werden, daß eine auf Φ gegebene Kurve c, $v = v(u)$, in eine Schmiegtangentenkurve von Φ^* übergeht*[1].

Wie a. a. O., § 10 (5) gezeigt wurde, lautet die Differentialgleichung der Schmiegtangentenkurven $v = v(u)$ der Biegungsfläche $\Phi^*(\varkappa, \varkappa_1^*, \sigma)$

$$2\varkappa\dot{v}\sin\sigma = \varkappa^2\varkappa_1^* v^2 + (\varkappa\dot{\sigma}\cos\sigma - \dot{\varkappa}\sin\sigma)\,v + (\varkappa_1^*\sin\sigma - \varkappa\cos\sigma)\sin\sigma. \quad (5)$$

Setzt man in (5) für v die gegebene Funktion $v(u)$ ein, so liefert (5) die Torsion $\varkappa_1^*$ der gesuchten Biegungsflächen $\Phi^*_{1,2}(\varkappa, \varkappa_1^*, \pm\sigma)$ von $\Phi(\varkappa, \varkappa_1, \sigma)$. —

Durch eine Mindingsche Biegung soll eine windschiefe Strahlfläche Φ so verbogen werden, daß eine gegebene geodätische Linie von Φ in eine Gerade übergeht[2].

Eine auf einer Strahlfläche liegende Kurve $v = v(u)$ in Vektordarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{s} + v(u)\,\mathfrak{e}, \quad (6)$$

ist dann und nur dann eine Gerade, wenn $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\ddot{\mathfrak{x}}$ linear abhängig sind, wenn also die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \cos\sigma + \dot{v} & v\varkappa & \sin\sigma \\ \ddot{v} - v\varkappa^2 - \dot{\sigma}\sin\sigma, & 2\dot{v}\varkappa + v\dot{\varkappa} + \varkappa\cos\sigma - \varkappa_1\sin\sigma, & v\varkappa\varkappa_1 + \dot{\sigma}\cos\sigma \end{matrix} \right\| \quad (7)$$

den Rang 1 hat. Diese Bedingung läßt sich auf unendlich viele Arten durch zwei unabhängige Gleichungen ausdrücken. Sind $(i.)$ für $i = 1, 2, 3$ die drei Spalten in (8), so können wir als diese beiden Gleichungen $|(1.), (3.)| = 0$ und $|(1.), v\varkappa(2.) + \sin\sigma(3.)| = 0$ auswählen. Die erste lautet ausgeschrieben:

$$\ddot{v}\sin\sigma - \dot{v}(v\varkappa\varkappa_1 + \dot{\sigma}\cos\sigma) - v\varkappa(\varkappa\sin\sigma + \varkappa_1\cos\sigma) - \dot{\sigma} = 0; \quad (8)$$

Die zweite ist die *Differentialgleichung der geodätischen Linien* einer Strahlfläche (a. a. O., § (11) (3)):

[1] *E. Beltrami*, Ann. die mat. (1) 7 (1866), S. 112.
[2] *E. Beltrami*, a. a. O., S. 109.

$$2\,\varkappa^2\,v\,v^2 + \dot{v}\,\{\varkappa\,\dot{\varkappa}\,v^2 + \cos\sigma\,(3\,\varkappa^2\,v + \dot{\sigma}\sin\sigma)\} + \\ + (1 + \varkappa^2\,v^2)\,(\varkappa^2\,v + \dot{\sigma}\sin\sigma) + \varkappa\,\dot{\varkappa}\cos\sigma = 0. \qquad (9)$$

Da die gegebene Kurve $v = v\,(u)$ eine geodätische Linie ist, ist (10) erfüllt. Setzt man daher in (9) für v die gegebene Funktion $v\,(u)$ und schreibt man $\varkappa_1{}^*$ statt $\varkappa_1$, so hat man die Gleichung, aus der sich $\varkappa_1{}^*$ und damit die gesuchten Biegungsflächen $(\varkappa, \varkappa_1{}^*, \pm\sigma)$ ergeben. —

Durch eine Mindingsche Biegung soll eine windschiefe Strahlfläche Φ so verbogen werden, daß eine auf ihr gegebene Raumkurve $v = v\,(u)$ eben wird[1].

Eine Kurve (6) ist dann und nur dann eben, wenn $(\dot{\xi}\,\ddot{\xi}\,\dddot{\xi}) = 0$ ist. Diese Bedingung führt, wenn wir sie für die Biegungsfläche $\Phi^*\,(\varkappa, \varkappa_1{}^*, \sigma)$ anschreiben, auf eine Gleichung von der Form

$$G\,\dot{\varkappa}_1{}^* + F_1\,\varkappa_1{}^{*3} + F_2\,\varkappa_1{}^{*2} + F_3\,\varkappa_1{}^* + F_4 = 0, \qquad (10)$$

worin $G, F_{1,\,2,\,3,\,4}$ von $\varkappa_1{}^*$ unabhängig sind. Jede Lösung von (10) für $\varkappa_1{}^*$ liefert die Biegungsflächen $(\varkappa, \varkappa_1{}^*, \pm\sigma)$.

(10) vereinfacht sich in folgenden Sonderfällen. Die in (10) auftretende Funktion G erweist sich als die linke Seite der Differentialgleichung (9) $G = 0$ der geodätischen Linien von Φ. Also gilt:

Das Problem, eine windschiefe Strahlfläche durch eine Mindingsche Biegung so zu verbiegen, daß eine auf ihr gegebene geodätische Linie eben wird, führt auf die kubische Gleichung:

$$F_1\,\varkappa_1{}^{*3} + F_2\,\varkappa_1{}^{*2} + F_3\,\varkappa_1{}^* + F_4 = 0. \qquad (11)$$

Die Funktion F_1 in (10) ist

$$F_1 = (v^2\,\varkappa^2 + \sin^2\sigma)\,(\dot{v} + \cos\sigma). \qquad (12)$$

$\dot{v} + \cos\sigma = 0$ (a. a. O., § 8 (2)) ist die Bedingung dafür, daß die Kurve $v = v\,(u)$ die Erzeugenden rechtwinklig schneidet. Da dann nach (13) $F_1 = 0$ ist, folgt aus (10)

Das Problem, eine windschiefe Strahlfläche durch eine Mindingsche Biegung so zu verbiegen, daß eine auf ihr gegebene Orthogonalkurve der Erzeugenden eben wird, führt auf die Riccatische Differentialgleichung:

$$G\,\dot{\varkappa}_1{}^* + F_2\,\varkappa_1{}^{*2} + F_3\,\varkappa_1{}^* + F_4 = 0. \qquad (13)$$

Ein zu den eben besprochenen Problemen ähnliches, scheinbar noch nicht behandeltes Problem ist das folgende:

Eine windschiefe Strahlfläche Φ soll durch eine Mindingsche Biegung in eine Strahlfläche Φ^* so übergeführt werden, daß eine auf Φ gegebene

[1] *E. Beltrami*, a. a. O., S. 119.

Kurve c, $v = v(u)$, in eine Kurve auf Φ^* übergeht, auf der die mittlere Krümmung von Φ^* verschwindet.

Zur Lösung dieses Problems hat man den Ausdruck (a. a. O., § 10 (7)) für die mittlere Krümmung einer Strahlfläche gleich Null zu setzen, nachdem man darin v durch die gegebene Funktion $v(u)$ und $\varkappa_1$ durch $\varkappa_1^*$ ersetzt hat. Somit erhält man für das $\varkappa_1^*$ der Biegungsflächen $\Phi^*_{1,2}(\varkappa, \varkappa_1^*, \pm\sigma)$ die Gleichung

$$\sin\sigma\,(\varkappa\cos\sigma + \varkappa_1^*\sin\sigma) - v\,(\dot\sigma\sin\sigma - \varkappa\,\dot\sigma\cos\sigma) + v^2\varkappa^2\varkappa_1^* = 0. \quad (14)$$

Buchbesprechungen.

Kurze Mathematiker-Biographien. Beihefte zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik". Nr. 6: Johann und Jakob Bernoulli. Von *J. O. Fleckenstein.* 1949. — Nr. 7: Evariste Galois. Von *L. Kollros.* 1949. — Nr. 8: Niels Henrik Abel. Von *O. Ore.* 1950. — Nr. 9: Gaspard Monge. Von *R. Taton.* 1950. — Nr. 10: Pierre Fermat. Von *J. Itard.* 1950. — Nr. 11: Die beiden Bolyai. Von *L. von Dávid.* 1951. Basel: E. Birkhäuser. Jedes Heft: sfr. 3.50.

Die Hefte sind sehr anregend geschrieben und leicht verständlich. Sie berichten nicht nur über Leben und Werk der Mathematiker, sondern auch von der Umwelt, in der sie lebten und von den damaligen Problemen. Die Hefte sind jedermann sehr zu empfehlen.

Wir lesen mit Interesse von den Brüdern *Bernoulli*, die verschieden veranlagt waren und beide auf ihre Art den Infinitesimalkalkül von Leibnitz weiter ausgebaut haben. Wir erleben die Ursprünge der Variationsrechnung und hören von vielen Problemen der angewandten Mathematik.

Immer wieder liest man ergreifend und staunend von dem hervorragenden Genie *E. Galois*, der nur 21 Jahre alt wurde, und die Grundlagen der ihm zu Ehren genannten Galoisschen Theorie geschaffen hat.

Mit Anteilnahme verfolgen wir Leben und Schaffen des bescheidenen und doch so genial veranlagten norwegischen Mathematikers *Abel*. Wir bewundern seine wertvollen Beiträge zur Lösung algebraischer Gleichungen durch Radikale, die Abelschen Integrale und das Abelsche Theorem.

Monge verdanken wir die wissenschaftliche Behandlung der Darstellenden Geometrie und der Infinitesimalgeometrie. Er hatte viel Erfolg im Leben, war Marineminister und schuf die berühmte Ecole polytechnique.

Außerordentlich vielseitig war *P. Fermat*, der in der Geometrie, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, besonders aber in der Algebra und Zahlentheorie hervorragende Leistungen bot. Unvergessen bleibt seine virtuose Behandlung der descente infinie.

Das Heft über *Wolfgang Bolyai* und seinen viel bekannteren Sohn *Johann* enthält sehr viele biographische Daten, z. B. vieles über den regen Briefwechsel mit *Gauß*. Selbstverständlich erfahren wir auch von den genialen Leistungen Johann Bolyais über Nichteuklidische Geometrie. *N. Hofreiter*, Wien

Das Wesen der Mathematik. Von *W. Lietzmann.* („Die Wissenschaft": Band 102.) Mit 41 Textabb., VII, 168 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1949. DM 8.—.

Das Buch von Lietzmann enthält vieles von dem, was in den letzten hundert Jahren Gemeingut der Mathematiker wurde, aber noch nicht in entsprechendem Ausmaß dem allgemeinen bildenden Unterricht eingegliedert ist, wie Mathematik und Logik, Nicht-Euklidische Geometrie, Mehrdimensionale Räume, Irrationalzahlen, Mengenlehre, Grenzwerte, differenzierbare Funktionen usw.

Mancher strebsame junge Mann empfindet hier selbst eine Bildungslücke, die er gerne ausfüllen möchte, soweit dies ohne tiefschürfende Studien möglich ist. Bei solch lobenswertem Streben kann das angeführte Buch wärmstens empfohlen werden.

Der alte Routinier Lietzmann schreibt ein flüssiges Deutsch, beschränkt sich auf das notwendigste, bleibt stets klar und langweilt den Leser niemals.

Die äußere Ausstattung des handlichen Leitfadens kann als würdig bezeichnet werden.

J. F. Lewandowski, Wien

Riesen und Zwerge im Zahlenreich. Von *W. Lietzmann*. Vierte Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe I, Nr. 25.) 25 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ —.40.

Das für jedermann äußerst anregend geschriebene Buch enthält einige Ergänzungen gegenüber den früheren Auflagen. Es hilft nach wie vor, Verständnis für die Zahlen zu finden, und spielend lernt der Leser gar vieles. Dem Buch ist größte Verbreitung zu wünschen.

N. Hofreiter, Wien

A University Algebra. Von *D. E. Littlewood*. VIII, 292 S. Melbourne-London-Toronto: W. Heinemann Ltd. 1950. Geb. 21 s. net.

Das Buch enthält Kapitel über lineare Gleichungssysteme, Determinanten, Matrizen, quadratische und hermitesche Formen, Gruppen, symmetrische Funktionen, elementare Zahlentheorie, Elemente der abstrakten Algebra, Polynome, numerische Auflösung von algebraischen Gleichungen, Galoissche Theorie, Invarianten, Tensoren, Algebren, Darstellungstheorie, lineare und orthogonale Gruppen mit Anwendungen auf Tensoranalysis und Invariantentheorie. Es zeichnet sich also durch sehr reichen Inhalt aus. Dabei ist die Darstellung gut verständlich. Die Beweise werden zwar nicht immer allgemein geführt, lassen aber das Wesentliche erkennen. Der reiche Inhalt geht klarerweise auf Kosten der Gründlichkeit und Ausführlichkeit. Die Darstellung geht oft eigene Wege. So erweist sich die Einführung der alternierenden und der bi-alternierenden Funktionen mehrmals als vorteilhaft (z. B. bei den Determinanten, symmetrischen Funktionen, in der Darstellungstheorie und bei der linearen Gruppe). Das Buch enthält zahlreiche Beispiele und bringt viele Anwendungen (Analytische Geometrie, mathematische Grundlagen der Quantentheorie).

N. Hofreiter, Wien

Drei Perlen der Zahlentheorie. Von *A. J. Chintchin*. Herausgegeben vom Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 62 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1951. DM 6.50.

Das kleine Buch bringt Feldpostbriefe von *Chintchin* in deutscher Übersetzung. Es behandelt drei Probleme der additiven Zahlentheorie, die leicht zu verstehen sind, während die Beweise große Schwierigkeiten bereitet haben. Die nun dargelegten Beweise sind elementar, wenn auch keineswegs einfach.

Kap. 1 handelt von dem Satz von *v. d. Waerden* über arithmetische Progressionen. Teilt man die Menge der natürlichen Zahlen auf irgend eine Weise in zwei Teile, so gibt es in mindestens einem Teil arithmetische Progressionen von beliebiger Länge. Der hier gegebene Beweis stammt von *Lukomskaja*.

Kap. 2 enthält die Hypothese von *Landau-Schnirelmann* und den Satz von *Mann*. Ist A eine im strengen Sinn monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen, $A(n)$ die Anzahl der Zahlen aus der Folge A, die n nicht übertreffen, dann verteht man unter der Dichte $d(A)$ der Folge die untere Grenze aller Werte der Brüche $A(n)/n$. Für die Dichten von zwei Folgen hat der aus Wien stammende Mathematiker *H. Mann* 1942 gezeigt, daß $d(A) + d(B) \leqq d(A + B)$. Er hat damit die Vermutung von *Landau-Schnirelmann* bewiesen. Hier wird der einfachere Beweis von *Artin* und *Scherk* (1943) gebracht.

Kap. 3 handelt von dem *Waring*schen Problem, das bekanntlich *Hilbert* (1907) allgemein gelöst hat. Der hier gegebene Beweis stammt von *Linnik* (1942) und benutzt nur elementare Hilfsmittel.

Das Buch wird viele Freunde finden. *N. Hofreiter*, Wien

Les trois étapes du problème Pythagore-Fermat. La recurrence, l'art des réciproques. Von *A. Maroger*. 98 S. Paris: Vuibert. 1951.

Der Autor beginnt mit den elementaren Methoden zur Auffindung von Pythagoräischen Dreiecken. Diese Methoden versagen bei der Lösung der Diophantischen Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$. Auf den heutigen Stand der Untersuchungen über den großen Fermatschen Lehrsatz wird nicht eingegangen. In der Folge enthält das Büchlein verschiedene Beispiele für die vollständige Induktion.

Dann kommt ein Kapitel über die Umkehrung mathematischer Lehrsätze. (Wilson'scher Lehrsatz, das sg. Steiner-Lehmus Theorem, Ptolemäischer Lehrsatz). Gegen Schluß wird der Satz vom Höhenschnittpunkt eines Dreiecks und die Projektion eines rechten Winkels erwähnt.

Der Autor bringt in schlagwortartiger Form manches aus der Geschichte der Mathematik und aus dem Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie, wobei er nicht mit Zitaten spart. *J. F. Lewandowski*, Wien

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von *L. Vietoris*, bearbeitet von *G. Lochs*. Mit 159 Textabb., 416 S. Innsbruck: Universitätsverlag Wagner. 1951. Geb. S 138.—.

Der nach dem Kriege fühlbar gewordene empfindliche Mangel an geeigneten mathematischen Lehrbüchern, insbesonders solchen der höheren Analysis, dürfte mit dem Erscheinen dieser Vorlesungen des wohlbekannten Verfassers und seines Mitarbeiters wohl endgültig behoben sein. Das vorliegende Buch ist vor allem als Handbuch für die Studierenden der Mathemathik und der Naturwissenschaften an den Universitäten und für das Selbststudium berechnet. Diesem Zwecke ist auch die ganze Anlage und die sorgfältige Ausarbeitung des Buches angepaßt, wobei die reiche pädagogische Erfahrung einer langjährigen Vorlesungspraxis genutzt worden ist. Daher ist überall sehr viel Mühe darauf verwendet worden, alle neuen Begriffe genau zu definieren und mit Beispielen zu erklären; die Beweise sind nicht nur mit der gebotenen Schärfe, sondern auch mit genügender Ausführlichkeit ausgearbeitet, so daß sie auch von einem Mindergeübten ohne Schwierigkeiten verstanden werden können; viele gute Abbildungen unterstützen das geschriebene Wort und zahlreiche Übungsaufgaben leiten den Leser dazu an, das Gelernte zu erproben und zu befestigen. Das Buch kann daher bestens allen denjenigen empfohlen werden, welche gediegene Grundlagen für das Studuim der Mathematik und der Naturwissenschaften sich erwerben wollen.

Der mehr didaktischen Anlage des Buches entspricht es, daß der Stoff weniger nach rein logischen Gesichtspunkten, als dem fortschreitenden Verständnis des Lesers entsprechend unterteilt ist; das Differential und das Integral werden nebeneinander entwickelt und die theoretischen Kapitel wechseln mit solchen über geometrische Anwendungen und numerische Rechnungsmethoden ab. Die genauere Auswahl und Einteilung des Stoffes kann aus der nachfolgenden kurzen Inhaltsangabe entnommen werden: 1. Kap. Grundbegriffe und vorbereitende Darlegungen (Zahlbegriff, Funktionsbegriff, Grenzwert usw.); 2. Kap. Die Ableitung oder der Differentialquotient; 3. Kap. Wichtige Begriffe und Hilfssätze (Konvergenzprinzip, Extrema, Satz von Rolle usw.); 4. Kap. Das

Integral; 5. Kap. Geometrische Anwendungen (Kreismessung, trigonometrische und hyperbolische Funktionen, Krümmung, Bogenlänge usw.); 6. Kap. Der Taylorsche Satz; 7. Kap. Unbestimmte Formen; 8. Kap. Numerische Methoden (Auflösung von Gleichungen); 9. Kap. Einiges aus der Algebra (Partialbruchzerlegung); 10. Kap. Integration der rationalen und verwandter Funktionen; 11. Kap. Analysis im Komplexen (komplexe Funktionen komplexer Veränderlichen, Potenzreihen usw.); 12. Kap. Das Wallissche Produkt und die Stirlingsche Formel; 13. Kap. Einiges aus der analytischen Geometrie des Raumes (Vektoren, Determinanten, Dreieck, Tetraeder usw.); 14. Kap. Raumkurven; 15. Kap. Funktionen mehrerer Veränderlicher (höhere partielle Ableitungen usw.); 16. Kap. Implizite Funktionen; 17. Kap. Mehrere Funktionen mehrerer Veränderlicher (Funktionaldeterminante usw.). Zum Schluß kommt ein ausführliches Stichwortverzeichnis und das griechische Alphabet. Der Druck und die Ausstattung des Buches sind vom Universitätsverlag Wagner in Innsbruck, der hiermit zum ersten Mal ein mathematisches Buch herausgebracht hat, sehr gut besorgt worden.

W. Gröbner, Innsbruck

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von *A. Ostrowski*. Zweiter Band: Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften; Mathematische Reihe: Band V.) 482 S. Basel: E. Birkhäuser. 1951. sfr 67.—.

Die Fülle des Stoffes zwang den Verfasser, den geplanten zweiten Teil seiner Vorlesungen auf zwei Bände zu erweitern, deren erster nunmehr vorliegt. Ein erstes Kapitel über unendliche Mengen, das die Lehre von den Punktmengen des R_n bis zum Borelschen Überdeckungssatz führt, schafft eine breite Grundlage für die folgenden Entwicklungen. Kap. 2 behandelt den Funktionsbegriff, das 3. Kap. bringt in aller Ausführlichkeit die Theorie der Folgen und Reihen, während im 4. Kap. die Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher eingeführt wird. Kap. 5 gibt die wichtigsten Anwendungen auf die Analysis, wobei der allgemeine Satz über die impliziten Funktionen die zentrale Stellung einnimmt. Kap. 6 behandelt numerische Methoden (Interpolation, Differentiation und Integration, Gleichungsauflösung.) Es folgen die geometrischen Anwendungen: im 7. Kap. Bogenlänge, Krümmungskreis, Einhüllende von Kurvenscharen, im 8. Kap. die Raumkurven bis einschließlich der Formeln von Frenet und einiges aus der Flächentheorie (Tangentenebene, Einhüllende von Flächenscharen, Längen- und Winkelmessung auf Flächen).

Die Vorzüge, die schon dem ersten Band nachzurühmen waren, sind in dem vorliegenden Teil womöglich noch in erhöhtem Maß anzutreffen: die glückliche Vereinigung von Anschaulichkeit und Strenge, die das Buch auch für Anfänger gut lesbar macht und die Fülle der Anregungen, die sowohl aus dem Text wie aus den zahlreichen Aufgaben entspringen. Einiges besonders Bemerkenswerte sei — ziemlich wahllos — herausgegriffen, um zu zeigen, wie inhaltsreich der Band ist: die Behandlung des Approximationssatzes von Weierstraß, die Begründung der Vertauschbarkeit der Differentiationsfolge mit Hilfe des vom Verfasser geprägten Begriffs der gleichmäßigen Differenzierbarkeit, die Ausführungen über lineare Interpolation (S. 294ff.), welche klarmachen, daß die in manchen Tafelwerken zu findende Übung, die Proportionalteile aus der korrigierten Differenz der genauen Werte statt aus der Tafeldifferenz zu berechnen, keinerlei Verbesserung bedeutet, sondern sich im Gegenteil zum Nachteil der Genauigkeit auswirken kann, u. a. m.

Möge der 3. Band — die Integralrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlicher — recht bald folgen und das schöne Werk, das nach Inhalt und Darstellungsweise wie kaum ein anderes dem Anfänger wie dem Fortgeschrittenen empfohlen werden kann, zum Abschluß bringen! *J. Radon*, Wien

Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Von *P. Lévy*. (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions.) XIV, 484 S. Paris: Gauthier-Villars. 1951. ffr. 4.000.—.

Das vorliegende Werk ist eine zweite Auflage des bekannten Buches Lecons d'analyse fonctionnelle (1922) des Verf., allerdings zum Teil in wesentlich veränderter Form. Insbesondere ist ein 4. Abschnitt vollständig neu hinzugekommen, der von Pellegrino verfaßt wurde und die Theorie der analytischen Funktionale zum Gegenstand hat. Dabei wurde der Umfang des Werkes gegenüber früher nur um etwa 40 Seiten vermehrt, was natürlich nur durch anderweitige Einsparungen möglich war. So konnten im ersten Abschnitt die Ausführungen über die Lebesguesche Integrationstheorie und über weitere heute allgemein bekannte Dinge aus der Theorie der reellen Funktionen wegbleiben. Außerdem ist die gedrängte Besprechung der Integralgleichungen 1. und 2. Art weggefallen. Der zweite Teil, welcher Begriffe und Methoden aus der Theorie der Differentialgleichungen der Analysis überträgt, ist fast unverändert geblieben. Ist er ja doch im großen und ganzen geistiges Eigentum des Verf. Dies trifft auch vielfach auf den dritten Abschnitt zu, der sich allerdings auch auf die Arbeiten von Gâteaux stützt und den Begriff des Mittelwertes im Funktionenraum sowie die Verallgemeinerung der Laplaceschen Gleichung bespricht. Hier hat der Verf. gegenüber der ersten Auflage vieles geglättet und neugefaßt, wobei wir nur auf die interessante Gegenüberstellung der abstrakten Maßtheorie und der hier gegebenen Theorie verweisen. Hohe Aktualität kommt dem vierten Abschnitt zu. Eine zusammenfassende Darstellung des darin abgehandelten Gebietes lag meines Wissens bisher nur in dem Bericht des Schöpfers der Theorie, Fantappiè vor, der in den Jb. d. DMV 43 veröffentlicht wurde. Banach scheint übrigens die Absicht gehabt zu haben, ein Werk über analytische Funktionale zu verfassen, doch hat ihn die Ungunst der Zeit offenbar an diesem Plane gehindert. Inzwischen hat natürlich die Theorie weitere Fortschritte gemacht, so daß dieser Abschnitt sehr willkommen ist. Allerdings geht er nicht übermäßig über Fantappiè's Bericht hinaus, ist jedoch viel breiter angelegt. Pellegrino weist jedoch ausdrücklich darauf hin, daß Platzmangel ein tieferes Eindringen nicht gestattet hat und von Seiten Fantappiè's und seiner Seite ein Werk in Vorbereitung ist, welches eine komplette Darstellung der Theorie bieten wird. Hier finden sich nach der Definition des analytischen Funktional eine ausführlichere Darstellung der Theorie der analytischen linearen Funktionale, der fundamentale Begriff der Indikatrix, hemysymmetrisches (hier antisymmetrisch genannt) und symmetrisches Funktionalprodukt usw. Das Kapitel über die gemischten Funktionale enthält u. a. die Volterraschen Funktionale des geschlossenen Zyklus, die normalen Funktionaltransformationen nach Pincherle. Nunmehr werden Anwendungen insbesondere auf die Integration partieller Differentialgleichungen gemacht, auf die seinerzeit schon kurz Fantappiè hingewiesen hatte und die er dann in zahlreichen Arbeiten weiter verfolgt hatte. Es soll hier auch auf Zusammenhänge mit den Ideen von Schwartz verwiesen werden. Schließlich werden die nicht linearen Funktionale besprochen, die „Taylor"-Entwicklung von Fantappiè und endlich werden einige speziellere Klassen von Funktionalen betrachtet, darunter auch die Invarianten von Calugareano.

Wie schon in der ersten Auflage ist es auch hier das Bestreben des Verf. gewesen, nicht möglichst allgemein und abstrakt zu arbeiten, sondern möglichst konkrete Fragestellungen der klassischen Analysis auf Funktionale zu übertragen. Demgemäß liegt i. a. der Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen zu Grunde, soweit es sich nicht um die Darlegungen des vierten Abschnittes handelt. Es kommt übrigens vielfach der Lebendigkeit der Darstellung zu Gute, daß der Verf. zu den bedeutendsten Kennern der Wahrscheinlichkeitstheorie zählt, und gelegentlich auf Querverbindungen hinweist.

Das Buch wird wesentlich zur Verbreitung und Förderung dieser Theorien beitragen.

L. Schmetterer, Wien

Values and Integrals of the Orthogonal Polynomials up to n = 26. Von *D. B. de Lury*. V, 33 S. Toronto: University of Toronto Press. 1950.

Die wohl zuerst von *Tschebyscheff* behandelte und mittels der Methode der kleinsten Quadrate gelöste Aufgabe aus n gegebenen x-Werten und zugehörigen mit zufälligen Fehlern behafteten Beobachtungswerten ein „Trendpolynom" $P(x)$ vom Grade $r < n$ zu bestimmen, läßt sich bequem lösen, wenn man $P(x)$ linear aus Polynomen kombiniert, welche gewissen Orthogonalitätseigenschaften genügen. Unter der Voraussetzung äquidistanter x-Werte sind die in bestimmter Weise normierten Orthogonalpolynome vom Grade r für $r \leqq 5$, $n \leqq 26$ z. B. schon bei *Fisher* und *Yates* (Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research) tabuliert. Die vorliegenden Tafeln übernehmen dieses Material, setzen es für $6 \leqq r \leqq n - 1$, $n \leqq 26$ fort, geben aber darüber hinaus die Integrale der Orthogonalpolynome erstreckt über $[0, n - 1]$ und $[-\frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}]$ für $r \leqq 14$, $n \leqq 26$ an. (Auf 5 Dezimalen genau.) Eine sorgfältige Anleitung bietet die Möglichkeit das Tafelmaterial für die Zwecke der modernen statistischen Prüftechnik heranzuziehen. Die Tafeln können auch für entsprechende mehrdimensionale Aufgaben herangezogen werden. Dem Praktiker wird das zur Verfügung stehende Material viel lästige Arbeit ersparen.

L. Schmetterer, Wien

Theorie und Anwendung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Ein Lehrbuch für Studierende der Naturwissenschaften und Technik. Von *S. Heinhold*. Erster Band. Mit 63 Abb. und 4 Bildtafeln, 213 S. München: Leibniz-Verlag. 1949. DM 15.—.

Dieses Buch, dessen erster Band hier vorliegt, unterscheidet sich von anderen Lehrbüchern über diesen Gegenstand durch die starke Berücksichtigung der Anwendungen. So wird gleich im ersten Kapitel „Die Grundlagen" (Komplexe Zahlen, Grenzwerte und unendliche Reihen) die komplexe Darstellung harmonischer Schwingungen; im zweiten Kapitel „Ableitung" (Analytische Funktionen, Potenzreihen, Anwendungen analytischer Funktionen, konforme Abbildungen mittels spezieller Funktionen, Logarithmus und verwandte Funktionen) die komplexe Behandlung stationärer Wechselstromkreise, die ebene Potentialströmung und die ebenen Potentialfelder der Elektrostatik besprochen. In diesem Kapitel wird schon die konforme Abbildung und die Riemannsche Fläche bei der Behandlung der elementaren Funktionen kräftig verwendet. Auch von graphischen Darstellungen wird ausführlich Gebrauch gemacht. In den weiteren Kapiteln „Integral" (Integraldefinition, Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel) und „Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz und der Cauchyschen Integralformel" (Reihenentwicklungen, Residuensatz, Meromorphe Funktionen, Potentialtheorie, wird z. B. die Berechnung reeller

uneigentlicher Integrale an einer großen Reihe von wichtigen Integralen auseinandergesetzt und die ebene Potentialtheorie bis zur ersten Randwertaufgabe besprochen. Selbstverständlich finden auch wichtige Dinge, wie Schwarzsches Lemma, Produktsatz von Weierstraß, der Satz von Mittag-Leffler eine ausführliche Behandlung.

Die Darstellung ist ausführlich sehr übersichtlich und ausgezeichnet verständlich. Eine Fülle von Beispielen und Aufgaben, deren Lösungen im Anhang des Buches gegeben werden, machen das Studieren dieses Buches zu einem Vergnügen. Die Begründung der Sätze ist mathematisch exakt; abgesehen von einigen ganz geringfügigen Ungenauigkeiten, die bei einer zweiten Auflage sofort behoben werden können. Bilder von *Gauß*, *Cauchy*, *Riemann* und *Weierstraß* schmücken dieses ausgezeichnete Buch, welches allen Studierenden der Mathematik, Physik und Technik nur wärmstens empfohlen werden kann. Es ist auch zum Selbststudium hervorragend geeignet. Die Ausstattung des Buches ist eine sehr gute. *E. Hlawka*, Wien

Introduction to the Theory of Algebraic Funktions of One Variable. Von *C. Chevalley*. (Mathematical Surveys: VI.) XII, 188 S. New York: American Mathematical Society. 1951. Geb. $ 4.—.

Die klassische Theorie des algebraischen Funktionenkörpers einer Variablen legt den Körper C der komplexen Zahlen als Konstantenkörper zu Grunde. H. Hasse inaugurierte eine Theorie, welche diese Voraussetzung fallen ließ und welche von F. K. Schmidt, A. Weil und anderen weiter ausgebaut wurde. Eine Darstellung seiner Theorie gab H. Hasse 1949 in seiner „Zahlentheorie". Hier liegt nun ein Buch vor, welches diese Theorie in voller Allgemeinheit behandelt. Der Aufbau unterscheidet sich sehr von dem Buch von H. Hasse. Wir wollen nun auf diesen Aufbau näher eingehen. Ist K ein beliebiger Körper, so sei R der Körper der algebraischen Funktionen einer Variablen x über K, das heißt R enthalte ein Element x, welches transzendent über K ist und R sei algebraisch von endlichem Grad über $K(x)$. Die Elemente in R, welche algebraisch über K sind, bilden den Konstantenkörper K'. Der fundamentale Begriff des Ortes $\mathfrak{p}$ wird so eingeführt: Eine Teilmenge $\mathfrak{p}$ von R heißt ein Ort, wenn es das Ideal der Nichteinheiten eines V-Ringes $\mathfrak{o}$ von R (über K) ist, das heißt eines Ringes, welcher in R liegt, K umfaßt und so, daß x^{-1} in $\mathfrak{o}$ liegt, wenn x nicht in $\mathfrak{o}$ liegt. Der Restklassenkörper Σ des Ringes $\mathfrak{o}$ des Ortes $\mathfrak{p}$ nach $\mathfrak{p}$ enthält dann K' und ist algebraisch über ihm mit einem Grad $d(\mathfrak{p})$, dem Grad von $\mathfrak{p}$. Es wird nun gezeigt, daß es unendlich viele Orte gibt und daß es in jedem Ort eine ortsuniformisierende Variable t gibt. Diese gestattet es nun, jedem x eine Ordnung $v_{\mathfrak{p}}(x)$ zuzuschreiben. Damit kommen wir auf die übliche Einführung des Ortes, in welchem $\mathfrak{o}$ als Bewertungsring, $\mathfrak{p}$ als Bewertungsideal erscheint. Die Einführung der Divisoren erfolgt in üblicher Weise. Die Elemente x aus R, für die $x \equiv 0(\mathfrak{a})$ gilt, das heißt wenn der Divisor $\mathfrak{a}$ die Exponenten $e(\mathfrak{p})$ hat, die Elemente x, für die $v_{\mathfrak{p}}(x) \geqq e(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p}$ ist, bilden einen Vektorraum L $(\mathfrak{a})$ über K' mit der endlichen Dimension $l(\mathfrak{a})$. Unter Benützung der Tatsache, daß $l(\mathfrak{a})+d(\mathfrak{a})$ wo $d(\mathfrak{a}) = \Sigma e(\mathfrak{p}) d(\mathfrak{p})$ der Grad des Divisors $\mathfrak{a}$ ist, für alle $\mathfrak{a}$ nach unten beschränkt ist, wird nun das Geschlecht g von R durch $-g+1 = \min(l(\mathfrak{a})+d(\mathfrak{a}))$ eingeführt. Dann erscheint nun der Riemannsche Satz als Trivialität. Um nun zum allgemeinen Riemann-Rocheschen Satz aufzusteigen, wird zunächst der Begriff der Verteilung (repartition) eingeführt. Dies ist eine Abbildung $\mathfrak{x}$, welche jedem Ort $\mathfrak{p}$ ein Element $\mathfrak{x}(\mathfrak{p})$ von R zuordnet (später wird der Begriff dahin erweitert, daß $\mathfrak{x}(\mathfrak{p})$ aus der perfekten Hülle $\overline{R}\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{p}$ genommen wird), so daß nur für endlich viele $\mathfrak{p}$ $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}(\mathfrak{p})) < 0$ ist. Bei geeigneter Abbildung ist R in dem Ring $\mathfrak{X}$ aller

Verteilungen, welcher ein Vektorraum über K ist, eingebettet. Ist jetzt weiter $\mathfrak{X}(\mathfrak{a})$ die Menge aller $\mathfrak{x} \equiv 0(\mathfrak{a})$, das heißt für die $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{x}) \geqq e(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p}$ gilt, so wird jetzt das Differential ω nach A. Weil so definiert: Es ist eine lineare Funktion auf $\mathfrak{X}$ und es gibt einen Divisor $\mathfrak{a}$, so daß ω auf $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}^{-1})+R$ identisch verschwindet. Wir sagen ω ist Vielfaches von $\mathfrak{a}$. Ist $\delta(\mathfrak{a})$ die Dimension des Raumes aller Differentiale, die Vielfache von $\mathfrak{a}$ über K sind, so kann jetzt der Riemann-Rochesche Satz so formuliert werden: $l(\mathfrak{a}) = d(\mathfrak{a}^{-1}) - g + 1 + \delta(\mathfrak{a}^{-1})$. Jetzt kann wieder in üblicher Weise jedem Differential ω ein Divisor $\mathfrak{D}(\omega)$ zugeordnet werden, damit die kanonische Klasse definiert und der Riemann-Rochesche Satz in der üblichen Fassung ausgesprochen werden.

Dies ist im wesentlichen der Inhalt der ersten beiden Kapitel. Das dritte Kapitel bringt jetzt die $\mathfrak{p}$-adischen Hüllen $\overline{R}\mathfrak{p}$ und die Definition des Residuums eines Differentials. Die Körpererweiterung algebraischer Funktionenkörper bildet den Inhalt des vierten Kapitels. Es liegen in R und S zwei algebraische Funktionenkörper vor, wo $R \subset S$ und der Konstantenkörper K von R im Konstantenkörper L von S mit $K = L \cap R$ enthalten ist. Liegt der Ort $\mathfrak{P}$ von S über $\mathfrak{p}$ von R (das heißt der Ring $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{P}$ enthält R nicht und bestimmt dadurch einen Ort $\mathfrak{p}$ in R), so ist ja für alle x $v_\mathfrak{P}(x) = v_\mathfrak{P}(x)$ (e Verzweigungsindex von $\mathfrak{P}$ in bezug auf $\mathfrak{p}$). Über jedem $\mathfrak{p}$ liegen nur endlich viele $\mathfrak{P}$ und wenn S von endlichem Grad über R ist, so gilt: $[S:R] = \Sigma d_i e_i$, wo d der Relativgrad von $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$ ist. Es folgen die Sätze über die Basen von S in bezug auf R, welche ganz in $\mathfrak{p}$ sind und die Puiseuxschen Entwicklungen. Wichtig sind jetzt die Begriffe von Norm, Conorm, Spur und Cospur. Jedem Divisor $\mathfrak{a}$ von R wird in gewisser Weise (auf die genauere an sich einfache Definition muß ich hier verzichten) ein Divisor $\mathfrak{A}$ aus S (Conorm) und wenn S vom endlichen Grad über R ist, jedem Divisor $\mathfrak{A}$ aus S ein Divisor $\mathfrak{a}$ aus R zugeordnet (Norm von $\mathfrak{A}$) ist. Analog werden die Verteilungen von R und S einander zugeordnet (Cospur und Spur). Den Abschluß dieser Begriffsbildungen bildet die Einführung der Differente. Das Kapitel schließt mit der Untersuchung der hyperelliptischen Körper und gipfelt in dem genau präzesierten Satz, daß es stets zu R als Modell eine Kurve im g-dimensionalen projektiven Raum ohne Singularitäten gibt, dessen rationaler Funktionenkörper R ist. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit den Erweiterungen des Konstantenkörpers. Auf den genauen Inhalt kann ich leider nicht eingehen. Es sei nur erwähnt, daß für beliebige Erweiterungen der Begriff der Separabilität definiert wird und Kroneckerprodukte kommutativer Algebren herangezogen werden. Die Definition des exakten Differentials beherrscht das sechste Kapitel. Zunächst wird, wenn x ein Element aus R ist dx für $R = K(X)$ definiert. Mit Hilfe der Cospur wird dann diese Definition auf einen beliebigen Funktionenkörper R übertragen und man erhält, wenn R separabel über $K[x]$ ist, für den Divisor von dx die geläufige Formel $\mathfrak{D}x\mathfrak{n}^{-2}$ (wo $\mathfrak{D}x$ die Differente von R in bezug auf $K[x]$ und $\mathfrak{n}$ der Divisor der Pole von x ist). Dann wird der Zusammenhang mit den Ableitungen, das heißt mit den Abbildungen D von R in sich selbst bzw. mit einem Oberkörper S, welche die Regeln der Differentiation von Summen und Produkten erfüllen, hergestellt. Mit diesem Kapitel schließt die algebraische Theorie ab. Die kurze Inhaltsübersicht über diesen Teil des Buches, wobei viele wichtige Dinge überhaupt nicht erwähnt wurden, zeigt wohl, welches bedeutende Werk hier vorliegt. Es muß noch hervorgehoben werden, daß der Verf. sich mit großem pädagogischem Geschick bemüht hat, die Begriffsbildungen zu motivieren. Sie werden immer zuerst an dem einfachen Fall $R = K(x)$ bzw. dem Fall des Konstantenkörpers aller komplexen Zahlen erläutert und dann auseinandergesetzt, inwieweit sie für den allgemeinen Fall abgeändert werden müssen.

Das letzte Kapitel „Riemannsche Fläche" legt als Konstantenkörper den Körper C zur Riemannschen Zahlenkugel erweitert, zu Grunde und bringt die transzendente Theorie. Die Riemannsche Fläche S in R wird in üblicher Weise als die Menge aller Stellen von R mit einer passenden Topologie versehen, eingeführt. Bei der Entwicklung der Theorie wird von der singulären Homologietheorie von Eilenberg, deren Sätze kurz zusammengestellt werden, Gebrauch gemacht. Der Begriff des Integrales eines Differentials wird von diesem Standpunkt aus entwickelt, die Schnittzahl eingeführt, die Homologiegruppen der Riemannschen Fläche bestimmt, aus der sich die Identität des topologischen Geschlechtes mit g ergibt, der Satz von Abel hergeleitet und die Körper vom Geschlecht 1 genauer untersucht. Dann wird die Riemannsche Fläche als analytische Mannigfaltigkeit aufgefaßt und die Bilinearrelationen von Riemann bewiesen. Bei diesem Kapitel ist es sehr instruktiv, diese Darstellung mit der klassischen Darstellung von Weyl in seinem Buch „Die Idee der Riemannschen Fläche" (besonders mit dem Anhang) fortlaufend zu vergleichen. Sie stellt auch eine nützliche Einführung in die Theorie von Hodge und Kodaira dar (wenn auch dort der Ausgangspunkt und das Ziel ein ganz anderes ist).

Das Buch ist gut lesbar und ist nicht zu knapp gehalten. Der Verf. hat sich bemüht, ein Buch zu schreiben, welches nicht zu viele Vorkenntnisse verlangt; so werden die benötigten Sätze der Algebrentheorie im Buch selbst hergeleitet, so daß ein Werk entstanden ist, welches nicht nur eine bedeutende wissenschaftliche Leistung darstellt, sondern wirklich eine ausgezeichnete „Einführung" in jeder Hinsicht ist. Dieses Buch ist für jeden, der auf diesem aktuellen Gebiet arbeitet, unentbehrlich.

E. Hlawka, Wien

The Theory of the Riemann Zeta-Function. Von *E. C. Titchmarsh*. VII, 346 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1951. Geb. 40 s. net.

Das herrliche Buch des Verfassers, welches 1930 in den Cambridge Tracts erschien, ist vergriffen und viele wichtige Untersuchungen, durch dieses Buch angeregt, haben seither unsere Kenntnisse über die Zetafunktion vermehrt. So hat sich der Verfasser entschlossen, es in neuem Gewande und in stark vermehrtem Umfang herauszugeben. Dies ermöglicht es nun, Untersuchungen, welche 1930 ihres Umfanges wegen nur kurz erwähnt werden konnten, ausführlich darzustellen. Das vorliegende Werk zeigt wieder die Vorzüge, welche wir von den anderen Büchern des Verfassers her kennen: Die Darstellung ist konzis, ausgezeichnet lesbar, welche die Überlegungen in ihrer natürlichen Reihenfolge herleitet und sie in hervorragender Weise durch vorausgeschickte Bemerkungen und Beweisskizzen motiviert, so daß der Leser die grundlegende Idee, auf welcher die Untersuchung beruht, deutlich vor sich sieht. Dadurch wird dem Leser nicht nur ein bequemer Weg zu wichtigen, in ihrer ursprünglichen Gestalt oft sehr unzugänglichen Entwicklungen eröffnet, sondern es regt ihn auch zu selbständigem Nachdenken an.

Nach einem einleitenden Kapitel, welches die Reihe der Zetafunktionen und die Reihen, welche mit ihr eng zusammenhängen bespricht, auch die Ramanujanschen Summen finden dabei ihren Platz, wird die Funktionalgleichung hergeleitet. Für sie wird eine Fülle von Beweisen gegeben (Eulersche Summenformel, Poissonsche Summenformel, die beiden Beweise von Riemann, Theorie der selbstreziproken Funktionen, Beweise von Kloostermann, Riemann-Siegel und Müntz u. a.). Der Beweis mittels der Eulerschen Summenformel rührt wohl von W. Wirtinger Acta Math. 26 (1902) her. Hier schließt sich ganz natürlich der Satz von Hamburger-Siegel an, welche unter gewissen Voraussetzungen die

Zetafunktion durch ihre Funktionalgleichung charakterisiert. Nun tritt das Hauptproblem der Theorie der Zetafunktion, die Bestimmung der nichttrivialen Nullstellen und damit die Bestimmung der nullstellenfreien Gebiete in der komplexen Ebene, welches sofort gelöst wäre, wenn die Riemannsche Vermutung bewiesen wäre, in den Vordergrund. Der erste Satz war der Satz von Hadamard und de la Vallee Poussin, daß $\zeta(s)$ auf $\sigma=1$ ($s=\sigma+it$) keine Nullstellen besitzt. Für diesen Satz wird nicht nur der übliche Beweis gegeben, sondern auch die Beweise von Hadamard, Atkinson und Ingham. Dann wird der nullstellenfreie Bereich bestimmt ($\sigma>1-A\ \log^{-9} t$), der bereits für den Beweis des Primzahlsatzes, der hergeleitet wird, ausreicht und das Resultat noch etwas verschärft. Verschärfungen, welche über diese klassischen Resultate hinausgehen, bilden ja einen wichtigen Teil des Buches und der Theorie. Das vierte Kapitel ist der approximativen Funktionalgleichung von Hardy-Littlewood und ihrer Erweiterung zu einer asymptotischen Reihe durch Siegel gewidmet. In diesem Kapitel werden auch Formeln von Meulenbeld (Dissertation Groningen 1936) erwähnt, aber leider ohne Beweis, welche sehr interessant erscheinen, aber dem Ref. nicht zugänglich sind. Das nächste Kapitel ist dem Problem der Größenordnung von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen für $t\to\infty$ gewidmet. Hier wird die Hardy-Littlewood-Weylsche und van der Corputsche Methode in der Titchmarsh'schen Fassung in vollem Umfang auseinandergesetzt. Bei der Bestimmung von α in $\zeta(\frac{1}{2}+it)=0(t^{\alpha}\log^{\beta} t)$ geht der Verfasser bis zu 27/164 (Titchmarsh 1931). Das beste Resultat dürfte jenes von Min (1949) nämlich 15/92 sein. Das sechste Kapitel behandelt das Problem für $\sigma=1$ nach der Vinogradowschen Methode in der Huaschen Gestalt. Nun folgt ein Kapitel, welches sich mit den sogenannten mean-value theorems beschäftigt, das heißt mit dem Verhalten von $1/T\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^k\,dt$ für $T\to\infty$ bei festem σ. Hier ist das Problem für $k=2$ und insbesondere für $\sigma=\frac{1}{2}$ weitgehend gelöst. Für höheres k ist ein Satz über Mittelwerte analytischer Funktionen von Hardy-Ingham und Polya, welcher einfacher von Titchmarsh bewiesen wurde ein wichtiges Hilfsmittel. Um diesen ganzen Fragenkreis haben sich Ingham und Titchmarsch — hier sind auch noch Davenport, Haselgrove, Atkinson, Kober zu nennen, besonders verdient gemacht. Die beiden folgenden Kapitel sind den Ω-Sätzen und der allgemeinen Verteilung der Nullstellen gewidmet. Hier ist nun, um nur eines zu erwähnen, der Satz von Littlewood, der früher in den Cambridge Tracts (3.81 Satz 41) stand und die damals ohne Beweis angegebene Verschärfung nach Titchmarsh und Kramaschke auf zwei Arten einfacher bewiesen. Nun folgt das Kapitel mit der gewichtigen Überschrift: Die Nullstellen auf der kritischen Linie. Hier nimmt die Reihe der Sätze, welche bei dem berühmten Satz von Hardy 1914 ihren Anfang nimmt und dessen Abschluß der Satz von A. Selberg (1942), daß $No(T) > AT\log T$ ($No(T)$ Anzahl der Nullstellen $\frac{1}{2}+it$ mit $0<t\leq T$) bildet, die beherrschende Rolle ein. Daß hier die Entdeckung von Davenport und Heilbronn, daß es Funktionen gibt, welche analoge Eigenschaften wie $\zeta(s)$ haben und trotzdem das Analogon zur Riemannschen Vermutung falsch ist, aufgenommen wurde, ist außerordentlich begrüßenswert. Die folgenden Kapitel „Allgemeine Verteilung der Werte von $\zeta(s)$", „Divisorenprobleme", „Lindelöfhypothese" und „Folgerungen aus der Riemannschen Vermutung" können nur erwähnt werden. Vielleicht sei noch bemerkt, daß jetzt der Satz 61, 5.63 des Cambridge Tract, der damals nur unter der Riemannschen Vermutung bewiesen war, jetzt (1946, Selberg) als richtig erkannt ist. Den Abschluß des Buches bildet das letzte Kapitel, welches der numerischen Berechnung der komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ ge-

widmet ist. Die Bemerkungen, welche der Verfasser hier macht, sind von außerordentlichem Interesse.

Man sieht aus dieser kursorischen Inhaltsangabe bereits, welches außerordentlich interessante und wichtige Buch hier vorliegt. Wir sind dem Verfasser für dieses glänzend geschriebene Werk zu Dank verpflichtet. Das Buch kann jedem Mathematiker nur wärmstens empfohlen werden. Die Ausstattung und der Druck ist wie immer bei diesem Verlag sehr gut.

E. Hlawka, Wien

Normal Elliptics Functions. A Normalized Form of Weierstrass's Elliptics Functions. Von *A. R. Low*. 27 S. Toronto: University of Toronto Press. 1950.

Es wird von einer Normalform des elliptischen Integrals ausgegangen mit den drei (endlichen) Verzweigungspunkten 0,1, m. $0 < m < 1$. Durch Umkehrung innerhalb der Intervalle $(\infty, 1)$, $(1, m)$, $(m, 0)$, $(0, -\infty)$ erhält man vier elliptische Funktionen p_i, die natürlich nicht von einander unabhängig sind. Es wird der Zusammenhang mit der Legendreschen Normalform bzw. mit den Jacobischen Funktionen hergeleitet. Zahlreiche Figuren sollen das Verständnis erleichtern. Schließlich werden einige numerische Werte gegeben, unter anderem die der p_i für $m = 0{\cdot}1, 0{\cdot}2, \ldots, 0{\cdot}9$ und $0{\cdot}1\ \omega_1, \ldots \omega_1$. Überraschender Weise findet sich kein Hinweis darauf, daß die erwähnte Normalform die bekannte Riemannsche Form ist.

L. Schmetterer, Wien

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Von *L. Collatz*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt und B. L. van der Waerden: Band LX.) Mit 110 Textabb. und einem Porträt, XIII, 458 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1951. DM 45.—, geb. DM 48.—.

Während in den meisten Lehrbüchern über Differentialgleichungen die Theorie weitaus im Vordergrund steht und die praktischen Methoden nur nebenbei erwähnt werden, stellt sich dieses Buch die Aufgabe, die wichtigsten numerischen Verfahren zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen ausführlich darzustellen. Es stellt nicht eine enzyklopädische Aufzählung aller vorhandenen Näherungsmethoden dar, sondern ist ein ziemlich breit geschriebenes Lehrbuch, das sich auf die wichtigsten Methoden beschränkt, aber diese ausführlich darstellt und an zahlreichen, der Praxis entnommenen Beispielen illustriert. Eingangs werden Hilfsformeln aus der Differenzenrechnung, ferner Quadraturformeln aufgestellt, die später oft verwendet werden.

Kap. I enthält Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Es beginnt mit den einfachsten Näherungsmethoden mit Fehlerabschätzungen. Dann folgt das viel benutzte und genauere Integrationsverfahren von Runge-Kutta mit wertvollen Hinweisen zur praktischen Durchführung. Ausführlich werden sodann die Differenzenverfahren für Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung entwickelt. Auch hier werden ausführliche Fehlerabschätzungen vorgenommen.

Kap. II handelt von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Hier werden wieder die Differenzenverfahren besonders ausführlich erörtert und Fehlerabschätzungen bei linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben durchgeführt. Eingehend werden ferner Näherungsverfahren diskutiert, die von Minimalprinzipien ausgehen, so Fehlerquadratmethode und be-

sonders das Ritzsche Verfahren. Auch Reihenansätze, insbesondere Potenzreihen, werden ausführlich behandelt. Das Kapitel bringt auch einiges über Eigenwertaufgaben.

Kap. III enthält Anfangs- und Anfangsrandwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen. Unter den hier gebrachten Verfahren wird das Differenzenverfahren am breitesten dargestellt, das am schnellsten und einfachsten einen Überblick über die Lösungsfunktionen ergibt.

Kap. IV bringt Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen. Es enthält das Differenzenverfahren, die Fehlerquadratmethode, das Ritzsche Verfahren, das Verfahren von Trefftz und Reihenansätze.

Das V. und letzte Kap. handelt von Integral- und Funktionalgleichungen. Es bringt allgemeine Methoden bei Integralgleichungen, spezielle Verfahren bei linearen Integralgleichungen, ferner singuläre Integralgleichungen und Volterrasche Integralgleichungen. Es werden hauptsächlich Beispiele von Funktionalgleichungen gebracht, da allgemein anwendbare Methoden nicht vorteilhaft sind und es sich empfiehlt, an Hand der speziellen Gleichung die geeignete Methode durchzuführen.

Das Buch enthält zahlreiche bis 1950 reichende Literaturangaben. Wertvoll sind die Hinweise, wann die eine, wann die andere Methode zweckmäßig ist. Von unschätzbarem Wert sind die zahlreichen, durchgerechneten Aufgaben. Das Buch ist für Mathematiker, Physiker und Ingenieure geschrieben und stellt für sie ein ausgezeichnetes Lehrbuch dar. Es trägt dazu bei, daß die numerischen Methoden einem größeren Kreis bekannt werden. Dies wird zur Folge haben, daß man dann auch mehr Erfahrungen über numerische Methoden gewinnt und damit Unterlagen für eine theoretische Durchforschung bekommt.

N. Hofreiter, Wien

Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höheren Analysis. Von *F. Schwank*. VI, 406 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ 5.67.

Das vorliegende Buch vermittelt die Kenntnisse aus Analysis, die jeder benötigt, der die Probleme, welche Technik und Physik ständig stellen, mit Erfolg behandeln will. Es vermittelt jenes Wissen, von dem wir wünschen, daß es unsere Studenten beherrschen, wenn sie die Hochschule verlassen.

Nach einem einleitenden Kapitel über die schwingende Seite gibt das Buch eine Darstellung der grundlegenden Sätze der Funktionentheorie. Dann folgen die partiellen Differentialgleichungen der Physik mit den Elementen der Potentialtheorie, wobei die Anwendungen auf Störungsprobleme und Elektrotechnik ausführlich besprochen werden. Sebstverständlich werden dabei die Kugel- und Besselfunktionen eingehend behandelt. Sehr ausführlich wird die Integralgleichungstheorie auseinandergesetzt und eine Fülle von Anwendungen gebracht. Das Kapitel über Variationsrechnung gibt Gelegenheit, die wichtige Ritzsche Methode zu besprechen. Das letzte Kapitel gibt einen schönen Überblick über die Differenzenrechnung. Ein Anhang, welcher die Sätze der linearen Algebra, der Theorie der Reihen und mehrfachen Integrale, und der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zusammenstellt, beschließt das Buch. Es ist klar, daß es von jedem Gebiet nur das Wichtigste bringen kann, aber alles was gebracht wird, ist ausführlich und klar dargestellt. Jedem Kapitel sind ausführliche Literaturangaben beigegeben, welche weitergehende Spezialwerke angeben.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß hier ein sehr schönes, ausgezeichnet lesbares Buch vorliegt, welches, um die einführenden Worte von

G. Hamel zu gebrauchen, in keiner Bibliothek fehlen soll, in deren Umkreis die Verwendung von Mathematik in Frage kommt. Ausstattung und Druck des Buches sind sehr gut.

E. Hlawka, Wien

Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung. Von *R. von Mises*. Dritte, neubearbeitete Auflage. IX, 278 S. Wien: Springer-Verlag. 1951. S 88.—, sfr. 18.50, $ 4.30, DM 18.—.

Verf., der bekanntlich den Anstoß zur modernen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie gegeben hat, entwickelte 1928 in der ersten Auflage dieses Buches seine Gedanken in anziehender allgemeinverständlicher Form. 1936 folgte die zweite (deutsche) Auflage (Besprechung in Mh. Math. Phys. *45*, 21).

Die vorliegende Auflage folgt dem bewährten Konzept der vorhergehenden. Kleinere Abänderungen dienen der Abrundung im Sinne der neuesten Entwicklung. So ist ein kurzer Hinweis auf die Theorie von Doob eingefügt, weiter eine Bemerkung über den Standpunkt von Cramèr (wobei die Anschauung über die Definition der Wahrscheinlichkeit bei Cramèr zumindest von den formalistisch eingestellten Mathematikern nicht geteilt werden dürfte). Neu ist auch die interessante Kritik der Kleinstichprobetheorie. Da es sich hier zweifelsohne um Fragen der Anwendung handelt, gehen wir hier nicht weiter darauf ein. Das auf den aktuellen Stand gebrachte Buch verdient nach wie vor regstes Interesse.

L. Schmetterer, Wien

An Introduction to Probability Theory and its Applications. Von *W. Feller*. Band I. XII, 419 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1950. $ 6.—.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie hat in den letzten 20 Jahren einen ungeheuren Aufschwung genommen. Der Verf. war daran maßgebend beteiligt. Wenn nun zu einer gründlichen Sachkenntnis des Gegenstandes noch bedeutendes didaktisches Geschick hinzutritt, dann entsteht ein Werk, wie das vorliegende; leicht verständlich, klar, allen Anforderungen an Strenge genügend, stets mit dem neuesten Stand der Forschung schritthaltend, originell. Es ist ganz unmöglich im Rahmen einer kurzen Besprechung auch nur annähernd den Inhalt dieses Bandes zu beschreiben. Allein die zahlreichen Beispiele und Aufgaben, die nicht nur der Einübung des Stoffes, sondern auch der Erweiterung des Gesichtskreises dienen, enthalten vieles, wofür es nicht immer leicht wäre, Literatur anzugeben. Die Aufgaben sind am Schlusse des Bandes i. a. mit Lösungen bzw. mit ausführlichen Literaturhinweisen versehen. In einer sehr hübsch geschriebenen Einleitung legt der Verf. den für den reinen Mathematiker einzig annehmbaren Standpunkt dar: Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist so wie jede mathematische Disziplin „von den Tatsachen unabhängig". Allerdings baut sie ihr Begriffssystem so auf, daß sie vermöge einer geeigneten Interpretation (Häufigkeitsauffassung) auf die Welt angewendet werden kann. Um auch den Anfänger nicht abzuschrecken, begnügt sich Verf. in diesem ersten Band mit der Theorie der diskreten Merkmalsräume und überschreitet diesen Rahmen nur gelegentlich und völlig ungezwungen zur Abrundung der Ergebnisse. Die Grundlagen werden etwa im Sinne von Kolmogoroff-Cramèr dargeboten, doch werden maßtheoretische Erörterungen angesichts der auferlegten Beschränkung völlig vermieden. Der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit wird allerdings

erst nach Behandlung elementar-kombinatorischer Aufgaben, wobei sich z. B. Gelegenheit findet, auf die Problematik der Boltzmann-Statistik einerseits und der Bose-Einstein und Fermi-Statistik anderseits einzugehen, eingeführt. Auch ganze alltägliche Dinge wie die Binomialverteilung, deren Poissonsche und Gaußsche Approximation versteht der Verf. durch zahlreiche Anwendungen aus allen möglichen Gebieten und interessante Bemerkungen reizvoll zu gestalten. Ein weiteres Kapitel ist im Hinblick auf die Auffassung von Mises von Interesse: Einerseits wird nämlich das Theorem von Cantelli, anderseits in genau präzesiertem Sinn die Unmöglichkeit eines Spielsystems nach Doob bewiesen. Es schließt mit dem Gesetz des iterierten Logarithmus für den Bernoulli-Fall. Jetzt erst erweist es sich als notwendig, den Begriff der zufälligen (diskreten) Variablen einzuführen. Nun lassen sich auch die verschiedenen Aussagen und Anwendungen des Gesetzes der großen Zahlen etwas allgemeiner fassen, als dies vorhin der Fall war. Nach Einführung der erzeugenden Funktion kommt Verf. zu seiner Theorie der rekurrenten Ereignisse. Diesbezügliche Arbeiten des Verf. sind neuesten Datums (1949). Es wird hier ein bestimmter zufälliger Prozeß beschrieben, der sich fast für alles folgende (Zufallsfolgen, Erneuerungstheorie, Irrfahrtenproblem, Markoff-Ketten) als bedeutsam erweist. In diesem Zusammenhange wird auch die Bedeutung des Arcus-Sinusgesetzes von Lèvy hervorgehoben. Das eindimensionale Irrfahrtenproblem wird auch als die unter dem Namen „Ruin des Spielers" bekannte Aufgabe interpretiert, für den einfachsten Diffusionsprozeß die Fokker-Planck-Gleichung hergeleitet und auch das zwei- und dreidimensionale Problem behandelt. Schließlich wird noch Walds sequential analysis in den Kreis der Betrachtungen gezogen. Die letzten Kapitel dienen einer ausgezeichneten Einführung in die moderne Theorie der Markoff-Ketten und einer Darstellung der einfachsten stochastischen Prozesse, soferne sie den Rahmen des Buches nicht allzusehr überschreiten. Hier finden sich z. B. der elementare unstetige (Poissonsche) Prozeß sowie der zuerst vom Verf. beschriebene Geburten- und Todesprozeß, der später von Kendall verallgemeinert wurde, mit zeitunabhängigen Geburts- und Todesraten und schließlich eine spezielle Form der Chapman-Kolmogoroff-Gleichung.

Ohne Zweifel ist das Buch für den Mathematiker geschrieben, aber die große Zahl wichtiger Anwendungen biologischer, physikalischer Natur, auf Fragen der Stichprobentheorie usw. müssen auch den nach diesen Richtungen orientierten Leser fesseln, wenn er überhaupt auf exaktes Arbeiten Wert legt. Geringfügige Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung genügen ja, um bei ernstem Studium bis zu den schwierigeren Fragen vordringen zu können. Wir hoffen nur, daß der zweite Band in Kürze erscheint.

L. Schmetterer, Wien

Statistics. An Intermediate Text Book. Von *N. L. Johnson* und *H. Tetley*. Band II. Mit Textabb., XI, 318 S. Cambridge: At the University Press. 1950. Geb. 20 s. net.

Der vorliegende Band II (Band I ist Ref. nicht zugänglich) ist gut geeignet, Statistiker, die nicht ausschließlich nach der mathematischen Seite hin orientiert sind, anderseits aber auch auf „Rezeptsammlungen" keinen Wert legen, sondern die Grundlagen der Theorie kennen und verstehen möchten, zu unterrichten. Insbesondere wird auf die Bedürfnisse der Studierenden des Versicherungswesens Rücksicht genommen. Das Buch gehört auch einer Serie von Publikationen an, welche unter der Patenschaft des Institutes für Versicherungswesen stehen. Wir gehen kurz auf den Inhalt ein: Normale Stichprobentheorie, Hinweise auf das Behrens-Fisher-Problem (nach Welch), χ^2-Kriterium (Herleitung der

asymptotischen Verteilung). Order-Schätz-Funktionen (u. a. Hinweise auf die Verwendung der Spannweite zum Aufbau eines Analogons zum t-Test). Verhältnismäßig ausführlich wird die allgemeine (Neymansche) Testtheorie besprochen. Weiter: Maximum likelihood Prinzip. Einige Eigenschaften der nach diesem Prinzip gewonnenen Schätzfunktionen (ohne Beweis). In den folgenden Kapiteln werden kurz, aber für den Zweck des Buches wohl ausreichend die Theorie der geschichteten Stichproben, Varianzanalyse, Korrelationstheorie (Rangkorrelation), sowie die Methode der kleinsten Quadrate, Anwendungen des χ^2-Kriteriums erörtert usw. Ein Anhang enthält Andeutungen über die Gamma- und Beta-Funktion sowie über den Begriff des mehrfachen Integrales. Es folgen Tafeln der χ^2- und F-Verteilung. Die zahlreichen in den Text eingestreuten Aufgaben, welche vielfach dem Gedankenkreis des Versicherungsmathematikers entnommen sind, werden am Schluß des Bandes gelöst. — Natürlich kann man gegen jede Stoffauswahl Einwände erheben, jedoch dürfte das Buch in dieser Form seiner Aufgabe völlig gerecht werden. Vielleicht hätte man eine eingehendere Behandlung des Maximum-likelihood-Prinzipes (die Begriffe wirksame oder erschöpfende Schätzfunktion habe ich nicht gefunden) und der Varianzanalyse gerne gesehen.

L. Schmetterer, Wien

Table of the Reciprocal of the Gamma-Function for Complex Argument. Von *J. P. Stanley* und *M. V. Wilkes*. 100 S. Toronto: Computation Centre, University of Toronto. 1950. $ 4.50.

Die Tafel enthält die Werte von $\frac{1}{\Gamma(Z)} = U + iV$ mit $Z = X + iY$ für $-0{,}50 \leqq X \leqq +0{,}50$ und $0{,}00 \leqq Y \leqq 1{,}00$ in Abständen von je 0,01 auf sechs Dezimalen. Die Berechnung erfolgte mit Hilfe der Potenzreihe von $\frac{1}{\Gamma(Z)}$ unter Verwendung einer Elektronenrechenmaschine.

N. Hofreiter, Wien

Table of Arctangents of Rational Numbers. Von *J. Todd*. (Applied Mathematical Series: Band 11.) 105 S. Washington: U. S. Government, Printing Office. 1951. $ 1.50.

Die Werte der Funktion Arctg x sind von besonderer Wichtigkeit für die Berechnung der Polarkoordinaten aus den rechtwinkeligen Koordinaten und für die Berechnung der Logarithmen von komplexen Zahlen. Die Tafel enthält: 1. die Werte von Arctg m/n und Arcctg m/n für $0 < m < n \leqq 100$ (m, n ganz) auf 12 Dezimalen; 2. die Reduktionsformeln für Arctg n mit $n \leqq 2089$. Das Vorwort bringt theoretische Erklärungen über die Herstellung der Tafeln und handelt insbesonders von den Reduktionsformeln für die Funktion Arctg x.

N. Hofreiter, Wien

Mathematische Formelsammlung. Von *W. Franke*. Siebente Auflage. 48 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1949. DM 1.20.

Dies ist eine ob ihres reichen Inhaltes und billigen Preises sehr zu empfehlende Sammlung von Formeln aus den Gebieten der Algebra, der Geometrie und der Differential- und Integralrechnung.

N. Hofreiter, Wien

Differentielle Liniengeometrie. Von *V. Hlavatý*. Aus dem Tschechischen übersetzt von M. Pinl. XXII, 568 S. Groningen-Batavia: P. Noordhoff. 1945. hfl. 22.75.

Das umfangreiche Werk des bekannten Verfassers gibt eine zusammenfassende systematische Darstellung der Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten des Linienraums unter konsequenter Benutzung der Plücker-Kleinschen Abbildung des Linienraums auf eine quadratische M_4 des R_5 (K-Quadrik). Es handelt sich demnach, wenn man will, um die Differentialgeometrie der auf der K-Quadrik gelegenen Punktmannigfaltigkeiten. Da der Verf projektive, affine und metrische Betrachtungen nach einheitlicher Methode durchführen will, hat er auf das für metrische Betrachtungen so nützliche Übertragungsprinzip von Study bewußt verzichtet. Der Reihe nach werden Linienflächen, Kongruenzen, Komplexe und endlich der Linienraum selbst untersucht. So ergeben sich z. B. entsprechend den drei Projektivkrümmungen einer Kurve auf der K-Quadrik drei projektive Differentialinvarianten einer Linienfläche (k_1, k_2, k_3). Dabei werden durch $k_3 = 0$ die Flächen eines linearen Komplexes, durch $k_2 = k_3 = 0$ die einer linearen Kongruenz und durch $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ die Flächen zweiter Ordnung gekennzeichnet. Aus der Theorie der Kongruenzen sei die beachtenswerte Tatsache hervorgehoben, daß sich die affine und die metrische Behandlung formal gleichmäßig erledigen lassen, da in beiden Fällen zwei quadratische Grundtensoren auftreten. Der Linienraum selbst erweist sich als eine konform-euklidische Mannigfaltigkeit. Diese Tatsache sowie die daran geknüpften Betrachtungen über die „anallagmatischen" Transformationen des Linienraums lassen sich allerdings aus einer stereographischen Projektion der K-Quadrik auf einen R_4 leicht ablesen. In einem Schlußkapitel hat der Verf. die Grundzüge der Tensorrechnung in dem benötigten Umfang zusammengestellt, wofür ihm zahlreiche Leser dankbar sein werden.

Die erstaunliche Fülle an Stoff, die der Verf. in seinem Werk verarbeitet hat, ist mit meisterhafter Klarheit dargestellt. Leider sind nur wenig Literaturangaben anzutreffen, so daß man über die auf jeden Fall bedeutende Menge hier zum erstenmal bewiesener Tatsachen sich schwer ein zutreffendes Bild machen kann.

J. Radon, Wien

Einführung in die kombinatorische Topologie. Von *K. Reidemeister*. XII, 209 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1951.

Es ist sehr zu begrüßen, daß dieses bekannte Buch neu gedruckt wurde (vgl. die Besprechung in Monatshefte für Mathematik 40 (1933), p. 9), da sich darin viele Dinge finden, die in Lehrbüchern sonst nicht dargestellt werden.

K. Prachar, Wien

Colloque de Topologie (Espaces fibrés). Centre belge de recherches mathématiques. 137 S. Liège: G. Thone. 1951.

Das belgische „Zentrum für mathematische Forschung" hat ein Kolloquium über verschiedene Fragen aus der Theorie der gefaserten Räume abgehalten im Juni 1950. Diese Wissenschaft, die auch in zahlreichen anderen Gebieten der Mathematik neue Fragestellungen angeregt hat, ist bisher noch nirgends in Lehrbüchern zusammenfassend dargestellt worden. Es ist also sehr zu begrüßen, daß diese Vorträge, von bekannten Fachleuten gehalten, nun im Druck erschienen sind. Es sind insgesamt neun Vorträge. Der erste, von H. Hopf, gibt eine sehr klare Einführung in die Theorie der gefaserten Räume, an Hand von speziellen Resultaten. Der zweite, von Henri Cartan, behandelt Differentialalgebren und

Anwendungen auf Lie'sche Gruppen. Es folgt ein Vortrag von Ch. Ehresmann über den Begriff des infinitesimalen Zusammenhanges in einem (differentierbaren) Faserraum. Der vierte Vortrag, von H. Cartan, handelt von der sogenannten Transgression in einer Lie'schen Gruppe und in einem Hauptfaserraum. Im Zusammenhang mit diesem Begriff steht auch ein interessanter Vortrag von J. L. Koszul. Ein Referat von E. Eckmann gibt eine sehr schöne Übersicht über die Homotopieeigenschaften der Faserräume mit zahlreichen Anwendungen. Der siebente Vortrag von J. Leray behandelt die Cohomologietheorie in Hauptfaserräumen. Die beiden letzten Referate von H. Hopf und G. Hirsch beschäftigen sich mit der Theorie der sogenannten Hindernisse höherer Ordnung und damit zusammenhängenden Fragen.

Diese knappe Aufzählung zeigt schon, wie vielfältig die Dinge sind, die in diesen Vorträgen behandelt wurden und wie groß das Gebiet ist, das hier der Forschung noch offen steht.

K. Prachar, Wien

Introduction à la Géométrie non euclidienne par la méthode élémentaire. Von *G. Verriest*. Mit 107 Abb., VII, 193 S. Paris: Gauthier-Villars. 1951. ffr. 1000.—.

Das Buch gibt eine elementare Darstellung der nichteuklidischen Geometrie. Zum Aufbau der Geometrie wird im wesentlichen das Hilbertsche Axiomensystem verwendet. Mit großer Sorgfalt werden dann die Folgerungen aus den einzelnen Axiomen hergeleitet. Besonders zu erwähnen ist das klare Hervorheben der Sätze, die der euklidischen und hyperbolischen Geometrie gemeinsam sind. Die im zehnten Kapitel behandelten Polygone sind ein schönes Beispiel dafür. Die Kapitel 8—10 handeln ausführlich von den Eigenschaften der hyperbolischen Geometrie, die von denen der euklidischen abweichen: Flächeninhalt des Dreiecks, Parallele, Cykel usw. Das letzte Kapitel ist der Riemannschen (elliptischen) Geometrie gewidmet.

Infolge seiner voraussetzungslosen, ausführlichen Darstellungsweise ist das Buch für eine Einführung in die nicht euklidischen Geometrien besonders geeignet und kann allen Interessenten bestens empfohlen werden.

K. Prachar, Wien

Cours de Cinématique. Von *R. Garnier*. Band III: Géometrie et Cinématique Cayleyennes. Paris: Gauthier-Villars. 1951.

Als Abschluß seines umfangreichen Werkes über kinematische Geometrie legt der Verfasser im dritten Band ein ausführliches, leicht leserliches Lehrbuch über Nicht-Euklidische Geometrie und Kinematik vor. — Der bewährten französischen Tradition folgend wird die „Methode der begleitenden Hilfsfigur" (mèthode du repére mobile) verwendet und naturgemäß auch bei rein geometrischen Fragen ein kinematischer Gesichtspunkt eingenommen. Alle Ergebnisse werden sorgfältig hergeleitet und anschaulich begründet, wobei im allgemeinen ein rein geometrischer Weg über eine ausschließlich analytisch-algebraische Darstellung den Vorrang hat. Soweit neueste Ergebnisse nicht aufgenommen und dargelegt werden konnten, werden sie durch Hinweise (auch in methodischer Hinsicht) oder Literaturangaben berücksichtigt. Bedauerlich erscheint es nur, daß in diesem zur Zeit ausführlichsten Werk über Kinematik lediglich eingliedrige (zwangsläufige) Bewegungsvorgänge betrachtet werden.

Der Aufbau der Nicht-Euklidischen Geometrie erfolgt durch Einbau in einen projektiven Raum im Sinne von Cayley und F. Klein; Weierstraßsche (genormte) Punktkoordinaten erscheinen daher angebracht. Nach Erledigung

der metrischen Grundbegriffe und Aufgaben im elliptischen (eigentlich sphärischen Raum) wird eingehend auf die Parataxie (Cliffordscher Parallelismus) eingegangen und die konforme Darstellung des elliptischen Raumes behandelt (Darbouxsche Transformation). Dann werden die Realitätsunterschiede und geometrischen Eigentümlichkeiten des hyperbolischen Raumes untersucht und das Euklidische, konforme Modell des hyperbolischen Raumes (Poincaréscher Halbraum) studiert. Im Zuge der Behandlung der Punktkinematik wird die Kurven- und Flächentheorie im Nicht-Euklidischen Raum dargelegt; darauf folgt das Studium der Schraubenbewegung, Beschleunigung, Zusammensetzung von Bewegungen und Bestimmung eines Bewegungsvorganges aus seinem Geschwindigkeitsfeld. Die „ebene" Bewegung wird nur im hyperbolischen Fall (Bewegung einer hyperbolischen Ebene auf einer ebensolchen) behandelt — die sphärische Bewegung wurde schon in einem früheren Band untersucht — und werden die Formeln von Savary und die Konstruktionen von Bobillier in allen Realitätsfällen eingehend (auch in der Poincaréschen Halbebene) untersucht. Bei den räumlichen Bewegungen werden Probleme erster Ordnung von denen zweiter Ordnung getrennt: Soweit in den Rahmen der ersteren fallend werden die Strahlflächen, die Achsenflächen von Bewegungsvorgängen, sowie associierte Kurven und Regelflächen behandelt. Den Problemen zweiter Ordnung ist ein ganzes Kapitel gewidmet: Beschleunigung, Wendepunktsort, Krümmungseigenschaften der Bahnkurven und Einhüllenden von Kurven, sowie der Einhüllenden von Flächen. Zwei Noten über die Begriffe „Flächeninhalt" und „Volumen" in der Cayleyschen Geometrie, sowie über Nicht-Euklidische Mechanik beschließen den reichhaltigen Band.

H. R. Müller, Graz

Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie. Von *R. König* und *K. H. Weise*. Erster Band: Das Erdsphäroid und seine konformen Abbildungen. Mit 109 zum Teil farbigen Textabb., XVIII, 522 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1951. DM 46.—, geb. DM 49.60.

Rein mathematisch formuliert, handelt es sich bei dem Gegenstand des vorliegenden Bandes um die Aufgabe, ein Drehellipsoid so auf die Ebene konform abzubilden, daß eine gegebene analytische Kurve eine gegebene analytische Abbildung erfährt, was mit den einfachsten Hilfsmitteln der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie erledigt werden kann. Dem angewandten Mathematiker erwächst die Aufgabe, die für die Praxis wichtigen Sonderfälle dieses Problems mit Methoden zu erledigen, die den Anforderungen des praktischen Rechnens genügen. Die Verfasser gehen von der speziellen Abbildung aus, welche einen Meridian derartig in die reelle Achse einer komplexen B-Ebene überführt, daß die reellen Werte von B mit der geographischen Breite zusammenfallen. Die komplexe Veränderliche $Z = e^{iB}$ erweist sich dann als geeignetes Mittel, um die anderen praktirch wichtigen komplexen Variablen auf dem Sphäroid verhältnismäßig bequem auszudrücken. Die betreffenden konformen Abbildungen werden eingehend studiert, und zwar jedesmal im Großen, wobei zahlreiche, zum Teil zweifarbige Figuren die Anschauung unterstützen. Die rechnerische Darstellung durch Reihenentwicklungen wird bis zur numerischen Auswertbarkeit durchgeführt. Von der Theorie der elliptischen Funktionen wird dabei kein Gebrauch gemacht, vielmehr werden alle Entwicklungen auf elementarem Weg hergeleitet. Zahlreiche Tabellen und zweckmäßige Zusammenstellungen von Formeln erleichtern die Übersicht, durchgerechnete Zahlenbeispiele erläutern die allgemeine Theorie. In einem Schlußkapitel sind die benutzten analytischen Hilfsmittel zusammengestellt, die dort verzeichneten

Formeln für das Rechnen mit Potenzreihen werden auch bei anderen Anlässen gern benutzt werden.

Die große Mühe, die sich die Verfasser mit der Abfassung des Buches gegeben haben, wird sich sicherlich lohnen, da das Werk als Zusammenfassung und Systematisierung zahlreicher Einzelarbeiten den fachlich Interessierten unentbehrlich sein dürfte.

J. Radon, Wien

Exercices de mécanique. Von *H. Beghin* und *G. Julia*. Zweite Auflage. Band 1, Heft 2. 244 S. Paris: Gauthier-Villars. 1951.

Das vorliegende Heft ist der Dynamik gewidmet und behandelt in sechs Kapiteln die Grundgleichungen, das Prinzip der virtuellen Arbeit, die Integrale der Grundgleichungen, den Stoß und führt bis zu den allgemeinen Gleichungen von Lagrange. Auch in diesem Teil der Aufgabensammlung wird zur Einleitung jedes Kapitels eine kurze Zusammenfassung der Theorie gegeben. Die Aufgaben zeichnen sich durch große Mannigfaltigkeit aus und jede für sich bietet interessante Einzelheiten. Die in der Besprechung des ersten Teiles gegebene Empfehlung möge auch für das zweite Heft gelten.

J. Radon, Wien

The Variational Principles of Mechanics. Von *C. Lanczos*. XXV, 307 S. Toronto: University Press. 1949.

Das vorliegende Buch stellt eine ganz ausgezeichnete Einführung in jenes reizvolle Gebiet dar, wo sich Mathematik und Physik vielleicht am innigsten verbinden. Drei mathematische Zugänge gibt es zu diesem Gebiet: formale Variationsrechnung, partielle Differentialgleichungen und die Lehre von den Berührungstransformationen, alle drei miteinander in enger Verbindung stehend. Wir haben in Carathéodorys Variationsrechnung ein Werk, das diese Zusammenhänge vom rein mathematischen Standpunkt aus behandelt; in dem vorliegenden Band führt der Physiker das Wort, aber es ist ein Physiker, der die mathematischen Zusammenhänge mit klarem Blick überschaut und dem Lernenden in vorbildlicher Weise verständlich zu machen weiß. Von elementaren Betrachtungen der klassischen Mechanik ausgehend führt er den Leser bis an die heutigen Grenzen unserer Naturerkenntnis (Quantenmechanik). Dem Physikstudenten kann die Lektüre des Werkes nicht warm genug ans Herz gelegt werden, denn es vermittelt ihm überall das richtige mathematische Verständnis, ohne ihn durch die, bei einer mathematisch lückenlos strengen Darstellung unvermeidlichen, rein mathematischen Umständlichkeiten zu belasten und bereitet so einem mathematisch vertieften Studium die Bahn. Aber auch der Mathematiker wird diese Synthese seiner Detailarbeit mit Vergnügen und Nutzen lesen.

J. Radon, Wien

Berichtigung.

Beim Umbruch der Arbeit: „*Über den idealtheoretischen Beweis des Satzes von Bézout*" von *W. Gröbner*, Innsbruck, Mh. Math., **55**, 82—86 (1951), ist durch eine falsche Anordnung der Fahnensätze ein sinnstörender Druckfehler entstanden; der gesamte Satz, der von S. 83, Z. 23 von oben bis S. 84, Z. 20 von oben reicht, muß herausgenommen und an dem Schluß der Arbeit, S. 86, Z. 8 von oben, hinzugefügt werden.

(Eingelangt am 24. August 1951.)

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften

Herausgegeben von **K. W. Fritz Kohlrausch,** Graz, und **Hans Thirring,** Wien
Schriftleitung: **Paul Urban,** Graz

Zuletzt erschien:

4. Band. 4. (Schluß-)Heft

(Ausgegeben im Mai 1951)

Mit 70 Textabbildungen. 192 Seiten. S 122.—, DM 26,80, $ 6.40, sfr. 27.50

Inhalt: **Thirring, W.** Bericht über die neuen Entdeckungen im Wasserstoffspektrum. — **Bergmann, O.** Zum Kernphotoeffekt an Beryllium. — **Wieninger, L.** Über die Reichweite von Polonium-α-Strahlen in einigen Alkalihalogenid-Kristallen (NaCl, KCl, KBr und KJ). — **Lihl, F.** Ferromagnetische Eigenschaften halboxydischer Eisen- und Eisen-Kobalt-Pulver. — **Urban, P.** und **F. Schwarzl.** Die Theorien der Teilchen mit höherem Spin. — **König, H. W.** Materielle und quantenhafte Eigenschaften elektromagnetischer Wellenfelder. — **Herzog, R. F. K.** Neue Erkenntnisse über die elektronenoptischen Eigenschaften magnetischer Ablenkfelder. — **Roesler, F. C.** Überlegungen zur Ehrenhaft'schen Magneto-Photophorese. — **Rieder, W., H. Müller** und **E. Broda.** Zum Szilard-Chalmers-Effekt mit schnellen Neutronen. — **Ehrenhaft, F.** Über die Photophorese, die wahre magnetische Ladung und die schraubenförmige Bewegung der Materie in Feldern. Erster Teil. — **Ehrenhaft, F.** und **F. Stockinger.** Der Magnet als Diakriter von Säure und Base. — **Smekal, A.** Bericht über die Österreichische Physiker-Tagung in Graz und die Gründung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft.

Ausgewählte Kapitel aus der Physik

Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule in Graz

Von

Prof. Dr. **K. W. F. Kohlrausch,** Graz

In fünf Teilen

Soeben erschien: I. Teil: **Mechanik**

Zweite, verbesserte Auflage

Mit 35 Textabbildungen. V, 105 Seiten. 1951. S 27.—, DM 5.40, $ 1.40, sfr. 5.60

Aus den Besprechungen zur ersten Auflage 1947:

„. . . Die prägnante Fassung ist durch klare, vorzügliche Abbildungen unterstützt, die das Verständnis wesentlich erleichtern. Aber nicht nur der Hörer, auch der fertige Ingenieur wird gerne die Bücher zur Hand nehmen, um seine Kenntnisse wieder aufzufrischen oder darin die Grundlagen für das Verständnis anderer Werke zu finden."

Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines

Soeben erschien:

Lexikon der Elektrotechnik

Von

Dipl.-Ing. Dr. techn. **Günther Oberdorfer**

Professor der Technischen Hochschule Graz

Mit 371 Textabbildungen. VII, 488 Seiten, 1951. Geb. S 96.—, DM 20.—, $ 4.80, sfr. 20.60.